

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Белорусского государственного университета

XXII ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ
для учащихся старших классов

Условия задач первого тура олимпиады
по математике и информатике

Задачи для учащихся 11 классов («Абитуриент БГУ – 2013»)

1. Найдите множество решений неравенства $\cos \frac{3}{2} - 4x - x^2 \geq 0$, удовлетворяющих условию $-4\frac{1}{5} < x < 0$.

2. а) Докажите, что функция $f(x) = \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin x + \cos x}$ нечетна на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, т.е. для всех значений x из этого интервала $f(-x) = -f(x)$.

б) Верно ли, что эта функция нечетна на всей естественной области определения?

в) Если б) неверно, то найдите множество всех значений x из области определения, на котором эта функция является нечетной.

3. В параллелограмме $ABCD$ высоты AE и AF опущены на стороны BC и CD соответственно. $AB = 5$, $AE = 4$, $AC = 9$. Найдите EF .

4. На диагональ куба нанизаны 10 одинаковых, касающихся друг друга шаров так, что все центры шаров лежат на диагонали куба, а крайние шары касаются всех трех граней при соответствующей вершине куба. Найдите отношение радиуса шара к длине ребра куба.

5. Колхоз имеет тракторы четырех марок: А, Б, В, Г. Бригада из четырех тракторов (двух тракторов марки Б и по одному трактору марок В и Г) вспахивает поле за два дня. Бригада из двух тракторов марки А и одного трактора марки В тратит на эту работу три дня, а из трех тракторов марок А, Б и В – четыре дня. За сколько дней выполнит эту же работу бригада, составленная из четырех тракторов разных марок?

6. В некотором городе действует следующая система оплаты проезда в общественном транспорте. Для одной поездки в любом виде транспорта необходимо закомпостировать предварительно купленный талон. Талоны продаются как поодиночке (и в этом случае стоимость одного талона равна p_1), так и блоками по k штук (стоимость блока равна p_2).

Вам необходимо выполнить N поездок в транспорте этого города. Определите наименьшую сумму, которую Вы должны потратить на эти поездки. Предполагается, что ездить «зайцем» Вы не собираетесь...

А. Решите задачу для $N=12$, $k=10$, $p_1=17$, $p_2=120$.

Б. Решите задачу для $N=18$, $k=10$, $p_1=17$, $p_2=120$.

Предложите общий алгоритм решения задачи для произвольного набора параметров.

Задачи для учащихся 9-10 классов (творческая олимпиада по математике)

1. Найдите сумму

$$\frac{1}{1^4+1^2+1} + \frac{2}{2^4+2^2+1} + \dots + \frac{2013}{2013^4+2013^2+1}$$

2. Доказать, что если $a^2 + b^2 = c^2 + 3$, где $a, b, c \in Z$, то c не делится на 3.

3. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через середину диагонали AC и пересекает сторону AB в точке M . Найдите отношение $AM : MB$, если $AC = 3 \cdot BD$.

4. Найдите все решения системы уравнений в зависимости от параметра a :

$$\begin{cases} x^3 = ax + 2ay, \\ y^3 = 2ax + ay. \end{cases}$$

5. Колхоз имеет тракторы четырех марок: А, Б, В, Г. Бригада из четырех тракторов (двух тракторов марки Б и по одному марок В и Г) вспахивает поле за два дня. Бригада из двух тракторов марки А и одного трактора марки В тратит на эту работу три дня, а из трех тракторов марок А, Б и В – четыре дня. За сколько дней выполнит эту же работу бригада, составленная из четырех тракторов разных марок?

6. В некотором городе действует следующая система оплаты проезда в общественном транспорте. Для одной поездки в любом виде транспорта необходимо закомпостировать предварительно купленный талон. Талоны продаются как поодиночке (и в этом случае стоимость одного талона равна p_1), так и блоками по k штук (стоимость блока равна p_2).

Вам необходимо выполнить N поездок в транспорте этого города. Определите наименьшую сумму, которую Вы должны потратить на эти поездки. Предполагается, что ездить «зайцем» Вы не собираетесь...

А. Решите задачу для $N=12, k=10, p_1=17, p_2=120$.

Б. Решите задачу для $N=18, k=10, p_1=17, p_2=120$.

Предложите общий алгоритм решения задачи для произвольного набора параметров.

Задачи для учащихся 7-8 классов (подготовительная олимпиада по математике)

1. а) Квадрат 5×5 заполнен числами так, что произведение чисел в каждой строке отрицательно. Докажите, что найдется столбец, в котором произведение чисел также отрицательно.

б) Проверьте (докажите или опровергните) аналогичное утверждение для произвольного квадрата $n \times n$ (возможно, в зависимости от значения $n \in N$).

2. Сколькими нулями может заканчиваться число $9^n + 1$?

3. В языке страны жевунов всего три буквы: А, В, О. Слова из этих букв составляются так, чтобы три одинаковые буквы не стояли подряд. Сколько шестибуквенных слов может быть в этом языке?

4. О трех различных точках A, B и C известно следующее: для любой точки M на плоскости отрезок AM меньше хотя бы одного из отрезков BM или CM . Найдите геометрическое место точек возможного расположения точки A (ответ обосновать).

5. Фирме необходимо, чтобы каждый день на работу выходило не менее десяти сотрудников. Каждый сотрудник хочет иметь не менее двух выходных в неделю. Каким наименьшим числом сотрудников может обойтись фирма? (В вашем решении покажите,

что меньшим числом сотрудников обойтись нельзя, а также предложите график выхода на работу, удовлетворяющий условиям задачи.)

6. В некотором городе действует следующая система оплаты проезда в общественном транспорте. Для одной поездки в любом виде транспорта необходимо закомпостировать предварительно купленный талон. Талоны продаются как поодиночке (и в этом случае стоимость одного талона равна p_1), так и блоками по k штук (стоимость блока равна p_2).

Вам необходимо выполнить N поездок в транспорте этого города. Определите наименьшую сумму, которую Вы должны потратить на эти поездки. Предполагается, что ездить «зайцем» Вы не собираетесь...

А. Решите задачу для $N=12, k=10, p_1=17, p_2=120$.

Б. Решите задачу для $N=18, k=10, p_1=17, p_2=120$.

Предложите общий алгоритм решения задачи для произвольного набора параметров.