Условия задач первого тура олимпиады

по математике и информатике

Задачи для учащихся 11 классов («Абитуриент БГУ-2013»)

1. *Найдите множество решений неравенства* $\cos\frac{3}{2} - 4x - x^2 \geq 0$, *удовлетворяющих условию* $-4\frac{1}{5} < x < 0$.

Ответ: $\left[-2-\sqrt{4+\cos\frac{3}{2}}\,;\,0\right)$.

Решение. Умножив исходное неравенство на -1, перепишем его в виде

$$x^2 + 4x - \cos\frac{3}{2} \leq 0.$$

Корни квадратного трехчлена, стоящего в левой части неравенства, имеют вид

$$x_1 = -2-\sqrt{4+\cos\frac{3}{2}},\quad x_2 = -2+\sqrt{4+\cos\frac{3}{2}}.$$

Поэтому решением неравенства будет отрезок $[x_1\,;x_2] = \left[-2-\sqrt{4+\cos\frac{3}{2}}\,;-2+\sqrt{4+\cos\frac{3}{2}}\right]$. Остается найти пересечение данного отрезка с промежутком, заданным в условии. Поскольку $\frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$, то $\cos\frac{3}{2} > 0$ и, следовательно, x_1 и x_2 имеют разные знаки, в частности, $x_2 > 0$. Остается сравнить числа $-4\frac{1}{5}$ и x_1. Учитывая, что на промежутке $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ функция $f(x) = \cos x$ монотонно убывает, имеем:

$$0 = \cos\frac{\pi}{2} < \cos\frac{3}{2} < \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Пусть теперь $\vee$ – один из символов операций сравнения. Тогда можем записать следующую цепочку сравнений $\left(4\frac{1}{5} = \frac{21}{5}\right)$:

$$-2-\sqrt{4+\cos\frac{3}{2}} \vee -\frac{21}{5} \Leftrightarrow 2+\sqrt{4+\cos\frac{3}{2}} \wedge \frac{21}{5} \Leftrightarrow \sqrt{4+\cos\frac{3}{2}} \wedge \frac{11}{5} \Leftrightarrow 4+\cos\frac{3}{2} \wedge \frac{121}{25} \Leftrightarrow \cos\frac{3}{2} \wedge \frac{21}{25}$$

Отсюда, поскольку $\cos\frac{3}{2} < \frac{1}{2}$, имеем: $\wedge = <$, т.е. $-2-\sqrt{4+\cos\frac{3}{2}} > -4\frac{1}{5}$ и, следовательно, решением поставленной задачи будет промежуток $\left[-2-\sqrt{4+\cos\frac{3}{2}}\,;\,0\right)$.

2. *Докажите, что функция* $f(x) = \frac{1+\sin x - \cos x}{1+\sin x + \cos x}$ *нечетна на интервале* $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, *т.е. для всех значений* x *из этого интервала* $f(-x) = -f(x)$.

Решение. Преобразуем функцию к виду

$$\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}=tg\,\frac{x}{2}.$$

Отсюда, прежде всего, определим область определения функции $f(x)$:

$$\begin{cases} \cos\frac{x}{2}\neq 0, \\ \cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\neq 0. \end{cases}$$

$\cos\frac{x}{2}\neq 0$, если $\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, т.е. $x\neq\pi+2\pi k,\ k\in z$

$\cos\frac{x}{2}\neq -\sin\frac{x}{2}$, если $\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{4}+\pi k$, т.е. $x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in z$

Таким образом область определения: $D_f = R\setminus\left\{\pi+2\pi k;\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in z\right\}$.

Далее делаем выводы:

а) на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ преобразования законны, так как знаменатель нигде не обращается в ноль.

б) неверно, ибо область определения D_f не симметрична относительно начала координат.

в) удалим из D_f те, и только те точки, которые нарушают симметрию относительно начала координат; получим ответ: $R\setminus\left\{\pi+2\pi k;\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in z\right\}$.

3. *В параллелограмме $ABCD$высоты AE и AF опущены на стороны BC и CD, соответственно $AB=5, AE=4, AC=9$. Найдите EF.*

Ответ: $\frac{36}{5}$.

Решение. Прежде всего, заметим, что $\angle FAE=\angle ABC$ (и тот, и другой в сумме с $\angle DCB$ дают $180°$). Поэтому для определения длины отрезка EF можно воспользоваться теоремой косинусов применительно к треугольнику AFE. Найдем недостающие элементы. Так как $AE\perp BC$, то из прямоугольного треугольника AEB (см. рис.) находим:

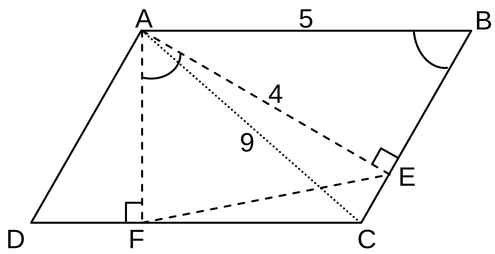

Рис. 1

$BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=3$, $\cos\angle ABC=\cos\angle FAE=\frac{3}{5}$;

$EC=\sqrt{AC^2-AE^2}=\sqrt{65}$.

Следовательно,

$$BC=CE+BE=\sqrt{65}+3.$$

Теперь, приравнивая значения площади параллелограмма, вычисленные по различным формулам, находим:

$$AF=\frac{BC\cdot AE}{AB}=\frac{4\cdot\left(\sqrt{65}+3\right)}{5}.$$

Таким образом,

$$FE^2 = AF^2 + AE^2 - 2\cdot AF\cdot AE\cdot\cos\angle FAE = \frac{16}{25}\cdot\left(\sqrt{65}+3\right)^2 + 16 - 2\cdot 4\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(\sqrt{65}+3\right)\cdot\frac{3}{5} = 16 +$$

$$+\frac{16}{25}\cdot\left(\sqrt{65}+3\right)\left(\sqrt{65+3}-6\right) = 16 + \frac{16}{25}\cdot(65-9) = \frac{16}{25}\cdot(25+56) = \frac{16\cdot 81}{25}$$

и

$$FE = \frac{36}{5}.$$

Внимание*!** Данное решение сильно опирается на чертеж. Поэтому для полной картины необходимо рассмотреть и второй случай, когда A – вершина ***острого угла.

4. *На диагональ куба нанизаны 10 одинаковых, касающихся друг друга шаров так, что все центры шаров лежат на диагонали куба, а крайние шары касаются всех трех граней при соответствующей вершине куба. Найдите отношение радиуса шара к длине ребра куба. Найдите отношение радиуса шара к длине ребра куба.*

Ответ: $\frac{1}{2+6\sqrt{3}}$ или $\frac{3\sqrt{3}-1}{52}$;

Решение. Пусть ребро куба равно a, радиус шара равен r. Тогда диагональ куба: с одной стороны равна $a\sqrt{3}$, а с другой — $8(2r)+2(r+r\sqrt{3}) = 18r+2r\sqrt{3}$, Откуда $(18+2\sqrt{3})r = a\sqrt{3}$. Следовательно: $\frac{r}{a} = \frac{\sqrt{3}}{18+2\sqrt{3}} = \frac{1}{2+6\sqrt{3}}$.

5. *Колхоз имеет тракторы четырех марок А, Б, В, Г. Бригада из четырех тракторов (двух тракторов марки Б и по одному трактору марок В и Г) вспахивает поле за 2 дня. Бригада из двух тракторов марки и одного трактора марки В тратит на эту работу три дня, а из трех тракторов А, Б и В – четыре дня. За сколько дней выполнит эту же работу бригада, составленная из четырех тракторов разных марок?*

Ответ: $12/7$ дня.

Решение. Пусть производительность трактора A составляет x га в день, $Б - y$, $В - z$ и $Г - t$ га в день; поле (весь объем работы) — V га. Тогда, учитывая условия для трех бригад тракторов, имеем:

$$\begin{cases}(2y+z+t)\cdot 2 = V,\\ (2x+z)\cdot 3 = V,\\ (x+y+z)\cdot 4 = V.\end{cases}$$

Необходимо найти $\frac{V}{x+y+z+t}$ (или можно находить $\frac{x+y+z+t}{V}$). Уравнения (1), (2) и (3) можно переписать так:

$$2\cdot\frac{y}{V}+\frac{z}{V}+\frac{t}{V} = \frac{1}{2},$$

$$2\cdot\frac{x}{V}+\frac{z}{V} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{x}{V}+\frac{y}{V}+\frac{z}{V} = \frac{1}{4}.$$

Складывая теперь два первых полученных уравнения и вычитая из их суммы третье, получаем $\frac{x}{V}+\frac{y}{V}+\frac{z}{V}+\frac{t}{V} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{7}{12}$. Откуда $\frac{V}{x+y+z+t} = \frac{12}{7}$.

6. *В некотором городе действует следующая система оплаты проезда в общественном транспорте. Для одной поездки в любом виде транспорта необходимо закомпостировать предварительно купленный талон. Талоны продаются как поодиночке (и в этом случае стоимость одного талона равна p_1), так и блоками по k штук (стоимость блока равна p_2).*

Вам необходимо выполнить N поездок в транспорте этого города. Определите наименьшую сумму, которую Вы должны потратить на эти поездки. Предполагается, что ездить «зайцем» Вы не собираетесь…

А. Решите задачу для $N=12,\ k=10,\ p_1=17,\ p_2=120$.

Б. Решите задачу для $N=18,\ k=10,\ p_1=17,\ p_2=120$.

Предложите общий алгоритм решения задачи для произвольного набора параметров.

Ответ: Для задачи А – 154 (необходимо купить один блок и два одиночных талона). Для задачи Б – 240 (необходимо купить два блока, а неиспользованные талоны – выбросить).

Решение. Если стоимость талона в блоке превышает стоимость одиночного талона ($\frac{p_2}{k} > p_1$), следует покупать только одиночные талоны. В противном случае для $N \operatorname{div} k$ поездок покупаем блоки, а затем определяемся с оставшимися поездками. Если $(N \bmod k) * p_1 < p_2$ (задача А), покупаем одиночные талоны, в противном случае (задача Б) – покупаем ещё один блок, а неиспользованные талоны выбрасываем.

Задачи для учащихся 9-10 классов (творческая олимпиада по математике)

1. *Найдите сумму*

$$\frac{1}{1^4+1^2+1}+\frac{2}{2^4+2^2+1}+\ldots+\frac{2013}{2013^4+2013^2+1}.$$

Ответ: $\frac{1007\cdot 2013}{2014\cdot 2013+1}$.

Решение. Каждое слагаемое искомой суммы имеет вид $\frac{k}{k^4+k^2+1}$ при значениях k, изменяющихся от 1 до 2013. Применяя прием дополнения до квадрата, разложим знаменатель выписанной дроби на множители:

$$k^4+k^2+1=k^4+2k^2+1-k^2=\left(k^2+1\right)^2-k^2=\left(k^2+k+1\right)\left(k^2-k+1\right).$$

Учитывая полученное разложение, преобразуем дробь следующим образом:

$$\frac{k}{k^4+k^2+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(k^2+k+1\right)-\left(k^2-k+1\right)}{\left(k^2+k+1\right)\left(k^2-k+1\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2-k+1}-\frac{1}{k^2+k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k-1)k+1}-\frac{1}{k(k+1)+1}\right).$$

Следовательно, искомая сумма примет вид

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{0\cdot 1+1}-\frac{1}{1\cdot 2+1}+\frac{1}{1\cdot 2+1}-\frac{1}{2\cdot 3+1}+\ldots+\frac{1}{2012\cdot 2013+1}-\frac{1}{2013\cdot 2014+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2013\cdot 2014+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2013\cdot 2014+1-1}{2013\cdot 2014+1}=\frac{1007\cdot 2013}{2013\cdot 2014+1}.$$

2. *Доказать, что если* $a^2+b^2=c^2+3$, *где* $a, b, c \in Z$, *то* c *не делится на* 3.

Доказательство. Предположим противное: c делится на 3. Тогда правая часть заданного равенства, т.е. выражение c^2+3 делится на 3, но не делится на 9. В то же время, поскольку квадрат целого числа не может при делении на 3 давать остаток 2 (докажите!), левая часть (т.е. сумма двух квадратов) либо делится на 3 (это возможно только в том случае, когда сами числа a и b кратны 3 и, следовательно, их квадраты кратны 9) и на 9, либо не делится на 3 (в противном случае). Таким образом, по свойствам делимости на 3 и 9 правая и левая части заданного равенства различны, а значит, сделанное предположение неверно, т.е. c не делится на 3.

3. *Окружность, построенная на стороне* AD *параллелограмма* $ABCD$ *как на диаметре, проходит через середину диагонали* AC *и пересекает сторону* AB *в точке* M. *Найдите отношение* $AM:MB$, *если* $AC=3\cdot BD$.

Ответ: $\dfrac{AM}{MB}=4$

Решение. Обозначим середину диагонали AC через O. O — точка пересечения диагоналей и $\angle AOD=\dfrac{\pi}{2}$ (рис.2). Поэтому $ABCD$ — ромб. Пусть $\angle BAO=\angle OAD=\alpha$; $\angle MAD=2\alpha$;

$\dfrac{OD}{AO}=\dfrac{\frac{1}{2}BD}{\frac{1}{2}AC}=\dfrac{1}{3}=tg\alpha$ ($\angle ODM=\angle MAO=\alpha$ как вписанные, опирающиеся на дугу MO).

Следовательно $\dfrac{BM}{MD}=tg\alpha=\dfrac{1}{3};\dfrac{MD}{AM}=tg2\alpha$.

Отсюда $\dfrac{BM}{AM}=tg\alpha\cdot tg2\alpha=tg\alpha\cdot\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\dfrac{2\,{}^1\!/_9}{1-{}^1\!/_9}=\dfrac{1}{4}$.

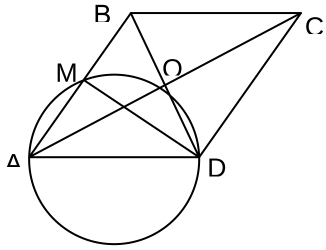

Рис. 2

4. *Найдите все решения системы уравнений в зависимости от параметра* a *:*

$$\begin{cases} x^3=ax+2ay,\\ y^3=2ax+ay. \end{cases}$$

Ответ: $x_1=y_1=0$; $x_{4,5}=y_{4,5}=\pm\sqrt{3a}$;

$x_{2,3}=-y_{2,3}=\pm\sqrt{a}$;

Решение. Складывая и вычитая уравнения системы, получим эквивалентную систему:

$$\begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2)=3a(x+y),\\ (x-y)(x^2+xy+y^2)=a\cdot(y-x). \end{cases}$$

Она разбивается на четыре системы

1) $\begin{cases} x+y=0,\\ x-y=0, \end{cases}$ (1)

которая и имеет единственное решение $x_1+y_1=0$.

2) $\begin{cases} x=-y, \\ x^2+xy+y^2=a, \end{cases}$ (2)

откуда получаем решения

$x_{2,3}=-y_{2,3}=\pm\sqrt{a}$,

которые существуют и отличны от решений системы (1) при $a>0$.

3) $\begin{cases} x=y, \\ x^2-xy+y^2=3a, \end{cases}$ (3)

откуда получаем решения

$x_{4,5}=y_{4,5}=\pm\sqrt{3a},$

которые существуют и отличны от решений системы (1) при $a>0$.

4) Если $y\neq\pm x$, то получается четвертая система:

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=3a, \\ x^2+xy+y^2=a, \end{cases} \quad (4)$$

откуда получается равносильная система:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2a, \\ xy=-a, \end{cases}$$

решением которой являются уже полученные в (2) решения.

5. *Колхоз имеет тракторы четырех марок А, Б, В, Г. Бригада из четырех тракторов (двух тракторов марки Б и по одному трактору марок В и Г) вспахивает поле за 2 дня. Бригада из двух тракторов марки и одного трактора марки В тратит на эту работу три дня, а из трех тракторов А, Б и В – четыре дня. За сколько дней выполнит эту же работу бригада, составленная из четырех тракторов разных марок?*

Ответ: $12/7$ дня.

Решение. см. решение задачи № 5 для 11 классов.

6. *В некотором городе действует следующая система оплаты проезда в общественном транспорте. Для одной поездки в любом виде транспорта необходимо закомпостировать предварительно купленный талон. Талоны продаются как поодиночке (и в этом случае стоимость одного талона равна p_1), так и блоками по k штук (стоимость блока равна p_2).*

Вам необходимо выполнить N поездок в транспорте этого города. Определите наименьшую сумму, которую Вы должны потратить на эти поездки. Предполагается, что ездить «зайцем» Вы не собираетесь…

А. Решите задачу для $N=12,\ k=10,\ p_1=17,\ p_2=120$.

Б. Решите задачу для $N=18,\ k=10,\ p_1=17,\ p_2=120$.

Предложите общий алгоритм решения задачи для произвольного набора параметров.

Решение. см. решение задачи № 6 для 11 классов.

<u>Задачи для учащихся 7-8 классов (подготовительная олимпиада по математике)</u>

1. *а) Квадрат* 5×5 *заполнен числами так, что произведение чисел в каждой строке отрицательно. Докажите, что найдется столбец, в котором произведение чисел так же* *отрицательно.*

б) Проверьте (докажите или опровергните) аналогичное утверждение для произвольного квадрата $n\times n$ (возможно, в зависимости от значения $n\in N$).

Решение. а) Из условия следует, что произведение всех чисел в таблице отрицательно. Но тогда, если сначала посчитать произведение чисел по столбцам, то в каком-то столбце произведение должно быть отрицательным.

б) Для n нечетных аналогично пункту а. Для четного это условие необязательно, что показывает следующий пример для таблицы 4×4 (для других аналогично) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. *Сколькими нулями может заканчиваться число* 9^n+1

Ответ: одним нулем.

Решение. Это число делится на 10, но не делится на 4 (9 при делении на 4 дает в остатке 1), значит оно не делится на и 100.

3. *В языке страны жевунов всего три буквы: А, В, О. Слова из этих букв составляются так, чтобы три одинаковые буквы не стояли подряд. Сколько шестибуквенных слов может быть в этом языке?*

Ответ: 492 слова

Решение. Каждое шестибуквенное слово составлено из трех блоков вида $AA, AB, AO, BA, BB, BO, OA, OB, OO$. Если в середине слова стоит блок AA, то в начале слова может стоять любой из 6 блоков, не кончающийся на букву A, а в конце - любой из 6 блоков, не начинающийся с буквы A. Поэтому блок AA в середине имеют $6\cdot 6=36$ слов, а общее количество слов, имеющих в середине блок из двух одинаковых букв, равно $36\cdot 3=108$. Если же в середине слова стоит блок из двух разных букв, то слева и справа от него может стоять один из 8 блоков, и, следовательно, существуют 64 слова с таким блоком в середине. Общее количество слов, у которых средний блок имеет две разные буквы, равно $64\cdot 6=384$. Всего в языке жевунов может быть $108+384=492$ шестибуквенных слова.

4. *О трех различных точках A, B и C известно следующее: для любой точки M на плоскости отрезок AM меньше хотя бы одного из отрезков BM или CM. Найдите геометрическое место точек возможного расположения точки A (ответ обосновать).*

Ответ: весь отрезок BC за исключением точек B и C.

Решение. Докажем сначала, что точка A не может лежать вне отрезка BC. Действительно, если точка A не лежит на прямой BC**,** то можно построить треугольник ABC и описать около него окружность. Поместив точку M в центр этой окружности, получим $AM=BM, AM=CM$, что противоречит условию. Осталось рассмотреть случай, когда точка A лежит на прямой BC, но вне отрезка BC. В этой ситуации, расположив точку M на прямой BC так, чтобы отрезок BC лежал внутри отрезка AM, получим неравенства $AM>BM, AM>CM$, что также противоречит условию. Значит, точка A не может лежать вне отрезка BC.

Рассмотрим теперь случай, когда A лежит на отрезке BC. Здесь возможны следующие варианты:

1) A лежит на отрезке BC

1.1. Если при этом точка M лежит на прямой AD (см.рис),

перпендикулярной BC, то AM — катет, а MC и BM —

гипотенузы прямоугольных треугольников AMC и AMB, т.е. $AM < MC$ и $AM < MB$.

1.2. Если M лежит в одной из плоскостей, определяемой прямой $AD \perp BC$, например, в той же полуплоскости, что и точка B (на рис. 3 она обозначена через M_1), то тогда ΔAM_1C - тупоугольный, в котором M_1C - большая сторона (т.к. лежит против тупого угла). Следовательно $AM_1 < CM$. Аналогично для другой полуплоскости.

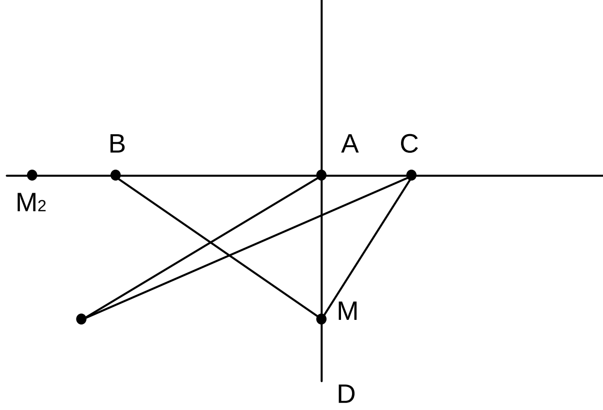

Рис. 3

1.3. M лежит на прямой BC левее точки A (на рис. 3 обозначена через M_2). Здесь очевидно $M_2A < M_2C$. Аналогично, если M_2 справа от точки A. Случай, когда точка M совпадает с A тривиален. Это завершает рассмотрение всех возможных вариантов.

5. *Фирме необходимо, чтобы каждый день на работу выходило не менее десяти сотрудников. Каждый сотрудник хочет иметь не менее двух выходных в неделю. Каким наименьшим числом сотрудников может обойтись фирма? (В вашем решении покажите, что меньшим числом сотрудников обойтись нельзя, а также предложите график выхода на работу, удовлетворяющий условиям задачи).*

Ответ: 14 человек.

Решение. Пусть в фирме n сотрудников. У каждого из них не более 5 рабочих дней, но, с другой стороны, число рабочих человеко-дней в неделю не меньше 10×7 . Следовательно, $5n \geq 70$ и $n \geq 14$. 14 человек достаточно: пусть четверо из них имеют выходные в понедельник и вторник, четверо — в среду и четверг, двое — в пятницу и субботу, двое — в субботу и воскресенье и двое — в пятницу и воскресенье.

6. *В некотором городе действует следующая система оплаты проезда в общественном транспорте. Для одной поездки в любом виде транспорта необходимо закомпостировать предварительно купленный талон. Талоны продаются как поодиночке (и в этом случае стоимость одного талона равна p_1), так и блоками по k штук (стоимость блока равна p_2).*

Вам необходимо выполнить N поездок в транспорте этого города. Определите наименьшую сумму, которую Вы должны потратить на эти поездки. Предполагается, что ездить «зайцем» Вы не собираетесь…

А. Решите задачу для $N = 12$, $k = 10$, $p_1 = 17$, $p_2 = 120$.

Б. Решите задачу для $N = 18$, $k = 10$, $p_1 = 17$, $p_2 = 120$.

Предложите общий алгоритм решения задачи для произвольного набора параметров.

Решение. см. решение задачи № 6 для 11 классов.