Решения задач второго тура олимпиады по математике и информатике ФПМИ БГУ – 2014

11 класс

1. Ответ: 1.

Прежде всего заметим, что искомые значения n должны быть нечетными, ибо в противном случае заданное в условии число $A = 4^n + n^4$ также будет четным, большим двух, а значит, составным. Таким образом, $n = 2k+1$, где $k \geq 0$ – целое. Тогда

$$A = 4 \cdot 4^{2k} + (2k+1)^4 = \left(2 \cdot 4^k + (2k+1)^2\right)^2 - 4 \cdot 4^k \cdot (2k+1)^2 =$$
$$= \left(2 \cdot 4^k + (2k+1)^2\right)^2 - \left(2 \cdot 2^k \cdot (2k+1)\right)^2 =$$
$$= \left(2 \cdot 4^k - 2 \cdot 2^k \cdot (2k+1) + (2k+1)^2\right)\left(2 \cdot 4^k + 2 \cdot 2^k \cdot (2k+1) + (2k+1)^2\right),$$

т.е. число A и в этом случае всегда раскладывается в произведение двух целых чисел. Поэтому для того чтобы оно было простым, необходимо потребовать, чтобы один из полученных сомножителей обратился в единицу, а поскольку второй сомножитель при всех неотрицательных целых k больше единицы (действительно, $2 \cdot 4^k + 2 \cdot 2^k \cdot (2k+1) + (2k+1)^2 \geq 2 + 2 = 4$), то необходимо выполнение равенства

$$2 \cdot 4^k - 2 \cdot 2^k \cdot (2k+1) + (2k+1)^2 = 1.$$

Преобразуя полученное уравнение, имеем:

$$2^{2k} + 2^{2k} - 2 \cdot 2^k \cdot (2k+1) + (2k+1)^2 = 1$$

или

$$2^{2k} + \left(2^k - (2k+1)\right)^2 = 1.$$

Отсюда, учитывая, что $2^{2k} \geq 1$ и $\left(2^k - (2k+1)\right)^2 \geq 0$, получаем для определения значений k систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{2k} = 1, \\ 2^k - (2k+1) = 0, \end{cases}$$

единственным решением которой является значение $k = 0$. Тогда $n = 2k+1 = 1$.

2. Указанное неравенство можно доказать, что называется «в лоб», например, следующим образом. Возводя обе части неравенства (неотрицательные!) в квадрат, получаем неравенство, равносильное доказываемому:

$$\frac{1 - a^2 + 1 - b^2 + 2\sqrt{\left(1 - a^2\right)\left(1 - b^2\right)}}{4} \leq 1 - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}.$$

Приводя подобные, уединяя оставшийся радикал, после сокращения на общий числовой множитель имеем

$$\sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)} \le 1-ab.$$

Поскольку с учетом области значений переменных $1-ab \ge 0$, то, повторяя процедуру возведения в квадрат, получаем:

$$1-a^2-b^2+a^2b^2 \le 1-2ab+a^2b^2$$

или

$$(a-b)^2 \ge 0,$$

что и решает задачу.

Для эстетов можно предложить другое решение: учитывая область значений переменных, сделаем замену переменных: $a=\sin\alpha$, $b=\sin\beta$, причем для того чтобы замена была взаимно однозначной, положим $\alpha,\beta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Тогда доказываемое неравенство примет вид

$$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}+\sqrt{1-\sin^2\beta}}{2} \le \sqrt{1-\left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}\right)^2}$$

или

$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2} \le \sqrt{1-\left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}\right)^2}.$$

После возведения обеих частей (опять-таки, неотрицательных!) в квадрат, получаем неравенство, равносильное доказываемому:

$$\frac{\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}{4} \le 1-\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta}{4}$$

или, после приведения подобных,

$$\frac{2+2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)}{4} \le 1.$$

Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\frac{1+\cos(\alpha-\beta)}{2} \le 1,$$

которое, учитывая ограниченность косинуса, очевидно.

3. Ответ: 5.

Обозначая первоначальное количество прессов через $n \in N$, получаем: после реконструкции количество прессов стало равным $n+3$, а производительности – до реконструкции $p_1=\frac{6480}{n}$, а после – $p_2=\frac{11200}{n+3}$. Поскольку по условию прессы после реконструкции стали более производительными, т.е. $p_1 < p_2$, имеем неравенство для определения переменной n:

$$\frac{6480}{n} < \frac{11200}{n+3},$$

откуда

$$4720n > 19440,$$

т.е., с учетом $n \in N$, $n \geq 5$.

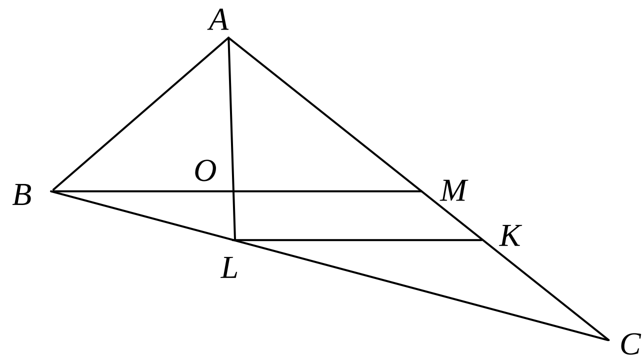
Поскольку производительности являются натуральными числами, то n должно быть делителем числа 6480, а $n+3$ – делителем числа 11200. Раскладывая указанные числа на простые сомножители, имеем: $6480 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5$, $11200 = 2^6 \cdot 5^2 \cdot 7$. Теперь заметим, что число n не должно делиться на 3, ибо в противном случае $n+3$ также должно делиться на 3, а такого делителя у числа 11200 нет. Таким образом, число n может быть любым не меньшим 5 делителем числа 6480, не делящимся на 3. Перебирая такие делители, находим: $n \in \{5, 8, 10, 16, 20, 40, 80\}$. Но тогда $n+3 \in \{8, 11, 13, 19, 23, 43, 83\}$. Из полученного для $n+3$ множества возможных значений делителем числа 11200 является только число 8. Поэтому

$$n+3 = 8$$

и

$$n = 5.$$

4. Ответ: $3:1$ и $S = \frac{3}{4}ml$.



Пусть O – точка пересечения AL и BM. Тогда, поскольку по условию $AL \perp BM$, то в треугольнике ABM AO является биссектрисой и высотой, а значит, ΔABM – равнобедренный, т.е. $AB = AM = MC$. Таким образом, $AC = 2AB$ и, следовательно, по свойству биссектрисы, $LC = 2BL$. Чтобы найти отношение $AO:OL$, проведем $LK \parallel BM$. Тогда из подобия треугольников BMC и LKC получаем:

$$\frac{MK}{KC} = \frac{BL}{LC} = \frac{1}{2},$$

т.е.

$$MK = \frac{1}{2}KC = \frac{1}{3}MC = \frac{1}{3}AM.$$

Поэтому из подобия треугольников AOM и ALK имеем:

$$\frac{AO}{OL} = \frac{AM}{MK} = \frac{AM}{\frac{1}{3}AM} = \frac{3}{1}.$$

Теперь займемся вычислением площади. Поскольку $BL = \frac{1}{3}BC$, то $S_{ABC} = 3S_{ABL}$, а площадь треугольника ABL легко вычислить:

$$S_{ABL}=\frac{1}{2}AL\cdot BO=\frac{1}{2}AL\cdot\frac{1}{2}BM=\frac{1}{4}lm.$$

Следовательно,

$$S_{ABC}=\frac{3}{4}ml.$$

5. Ответ: $x=-\frac{1}{2}$; $y=-\frac{5}{2}$.

Вычитая из второго уравнения системы первое, умноженное на 5, получаем уравнение

$$5x^2+24xy-5y^2+2y-10x=0$$

и поскольку

$$5x^2+24xy-5y^2=(5x-y)(x+5y),$$

то это уравнение перепишется в виде

$$(5x-y)(x+5y)-2(5x-y)=0$$

или

$$(5x-y)(x+5y-2)=0.$$

Таким образом, исходная система распадается на две:

1.

$$\begin{cases}5x-y=0,\\ x(5x-y)+2y+5=0,\end{cases}$$

откуда

$$y=-\frac{5}{2},\quad x=-\frac{1}{2}.$$

2.

$$\begin{cases}x+5y-2=0,\\ y^2+x(2-5y)+1=0.\end{cases}$$

Второе уравнение этой системы с учетом первого принимает вид

$$y^2+(2-5y)^2+1=0$$

и, очевидно, вещественных решений не имеет.