ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Белорусского государственного университета

XXIII ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ
для учащихся старших классов

Условия задач первого тура олимпиады

<u>Задачи для учащихся 11 классов</u> (олимпиада «Абитуриент БГУ-2014»)

1. Дано натуральное число $A = 11...122...25$, у которого первые 2013 цифр – это 1, следующие 2014 цифр – это 2, и последняя цифра – это 5. Докажите, что число A является квадратом некоторого натурального числа и найдите это число.
2. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.
3. **А)** В некотором классе некоторой школы каждый мальчик дружит с 6-ю девочками и 5-ю мальчиками, а каждая девочка дружит с 5-ю мальчиками и 4-ю девочками. Сколько школьников учится в этом классе, если известно, что их не более 35? **Б)** А если это не класс, а спортивный клуб и число детей не более 100? **В)** А если их не более *n*?
4. Найдите все значения x, для которых величина y, определяемая равенством $y = \frac{\pi}{3}\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)$, удовлетворяет уравнению
$$\log_4(\operatorname{tg} 2y - 3\operatorname{ctg} y) = 1 + \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(\operatorname{ctg} y - \operatorname{tg} y).$$
5. В основании прямой треугольной призмы лежит прямоугольный треугольник, катеты которого равны *a* и *b*. Некоторая плоскость пересекает все боковые ребра призмы так, что в сечении получается правильный треугольник. Определите сторону этого треугольника.
6. Сколько существует *n*-значных натуральных чисел, в записи которых используются только цифры 1, 2, 3, 4, причем каждая из указанных цифр встречается по крайней мере один раз? Укажите формулу для определения количества указанных чисел или опишите алгоритм, с помощью которого можно его определить. Решите аналогичную задачу для чисел, состоящих из цифр 1, 2, … , *l* ($l \leq 9$).

Задачи для учащихся 9-10 классов (творческая олимпиада по математике)

1. Определите, что стоит в периоде десятичного разложения дроби 1/81.
2. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_6$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите x и y, если

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y = a_3, \\ a_4 x + a_5 y = a_6. \end{cases}$$

3. На сторонах прямоугольного треугольника с катетами a и b построены квадраты, лежащие вне треугольника. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах этих квадратов.
4. **А)** В некотором классе некоторой школы каждый мальчик дружит с 6-ю девочками и 5-ю мальчиками, а каждая девочка дружит с 5-ю мальчиками и 4-ю девочками. Сколько школьников учится в этом классе, если известно, что их не более 35? **Б)** А если это не класс, а спортивный клуб и число детей не более 100? **В)** А если их не более n?
5. Двое играют в следующую игру. Имеются две кучки спичек. Один игрок выбрасывает какую-нибудь кучку, а оставшуюся кучку разбивает на две. Следующий игрок поступает аналогично. И так далее. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход из-за того, что в каждой кучке останется по одной спичке. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий игру или его партнер, если вначале в кучках было 100 и 111 спичек?
6. Хозяйство дяди Федора, кота Матроскина и Шарика выросло настолько, что каждый из них построил в общем дворе свой дом. Дома стоят без порядка и без номеров, поэтому почтальон Печкин все время путается, в какой дом какую корреспонденцию приносить. Друзья решили навесить на свои дома номера, но, учитывая дальнейший рост хозяйства, заказали девять табличек с номерами от 1 до 9.

   а) Сколько существует способов пронумеровать дома, используя заказанные таблички (поскольку дома стоят беспорядочно, то и использовать можно любые из табличек и развешивать их можно в любом порядке)?

   б) На Новый Год дядя Федор, кот Матроскин и Шарик, желая, чтобы почтальон Печкин навещал их почаще, решили повесить на дома все девять табличек, по три на каждый дом. Сколько способов развесить девять табличек существует в этом случае?

   в) А на Первое Мая они поступили еще проще: перевесили все девять табличек на свои дома совсем без разбору. При этом могло получиться даже так, что на некоторых домах было по много табличек (хоть все девять на одном), а на некоторых – вообще ни одной. Сколько способов развесить девять табличек существует в этом случае?

Задачи для учащихся 7-8 классов (подготовительная олимпиада по математике)

1. Определить, что стоит в периоде десятичного разложения дроби 1/81.
2. Пусть сумма членов в каждой из двух заданных троек неравных нулю чисел, равна нулю. Показать, что суммы кубов членов этих троек относятся между собой так же, как и произведения их членов.
3. В некотором классе некоторой школы каждый мальчик дружит с 6-ю девочками и 5-ю мальчиками, а каждая девочка дружит с 5-ю мальчиками и 4-ю девочками. Сколько школьников учится в этом классе, если известно, что их не более 35?
4. На рынке установили новые электронные весы, позволяющие измерить любой вес от 100 до 1000 граммов с точностью до 1 грамма, но за их использование берут плату: за одно взвешивание – одна тысяча рублей. Рядом стоят двухчашечные весы, они без гирь, зато пользоваться этими весами можно абсолютно бесплатно и сколько угодно раз. **А)** Как, заплатив всего 1 тыс. рублей, отвесить 2 кг 14 г сахара? **Б)** Пусть нам необходимо отвесить m граммов сахара, имея только 1 тыс. рублей. Попробуйте описать (формулой или словесно), при каких m это возможно и как в таких случаях нужно действовать? В частности, ответьте, можно ли отвесить 1009 г сахара? **В)** Если 1009 г за 1 тыс. рублей (т.е. за одно взвешивание на электронных весах) не получается, то может быть вы справитесь за 2 тыс. рублей (два взвешивания на электронных весах)? Если да, то покажите – как, если нет – докажите это.
5. При каких n, $5 \le n \le 10$, можно нарисовать n-звенную замкнутую ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев? Если при каких-то значениях n этого сделать нельзя, то докажите, если можно, то приведите пример.
6. Хозяйство дяди Федора, кота Матроскина и Шарика выросло настолько, что каждый из них построил в общем дворе свой дом. Дома стоят без порядка и без номеров, поэтому почтальон Печкин все время путается, в какой дом какую корреспонденцию приносить. Друзья решили навесить на свои дома номера, но, учитывая дальнейший рост хозяйства, заказали девять табличек с номерами от 1 до 9.

   а) Сколько существует способов пронумеровать дома, используя заказанные таблички (поскольку дома стоят беспорядочно, то и использовать можно любые из табличек и развешивать их можно в любом порядке)?

   б) На Новый Год дядя Федор, кот Матроскин и Шарик, желая, чтобы почтальон Печкин навещал их почаще, решили повесить на дома все девять табличек, по три на каждый дом. Сколько способов развесить девять табличек существует в этом случае?

   в) А на Первое Мая они поступили еще проще: перевесили все девять табличек на свои дома совсем без разбору. При этом могло получиться даже так, что на некоторых домах было по много табличек (хоть все девять на одном), а на некоторых – вообще ни одной. Сколько способов развесить девять табличек существует в этом случае?