***Решения задач второго тура олимпиады по математике и информатике ФПМИ БГУ – 2015***

**11 класс**

1. Ответ: $-\sqrt{13}$.

Метод, которым проще всего найти решение данной задачи, можно условно назвать «методом искусственного параметра». Введем обозначение $p = x + 2y$. Согласно условию $p < 0$. Тогда $x = p - 2y$ и неравенство, о котором идет речь в условии примет вид

$$(p-2y)^2 - 4y(p-2y) + y^2 + 3 \le 0$$

или

$$13y^2 - 8py + p^2 + 3 \le 0.$$

Теперь остается найти те значения величины $p$, при которых последнее неравенство имеет решение. Для этого, очевидно, дискриминант данного квадратного по $y$ трехчлена должен быть неотрицательным, т.е. должно выполняться неравенство (учитываем четный коэффициент при первой степени рабочей переменной)

$$(4p)^2 - 13(p^2+3) \ge 0$$

или

$$p^2 > 13,$$

откуда

$$p \in \left(-\infty; -\sqrt{13}\right] \bigcup \left[\sqrt{13}; +\infty\right).$$

Учитывая условие $p < 0$, получаем: $p_{\max} = -\sqrt{13}$.

2. Ответ: $x = \dfrac{\pi k}{2},\ k \in Z$, $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Прежде всего, отметим, что при любых $a, b, c$ имеет место соотношение

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b)^3 + c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc =$$
$$= (a+b+c)\left((a+b)^2 - (a+b)c + c^2\right) - 3ab(a+b+c) = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right).$$

При этом второй сомножитель, учитывая равенство

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = a^2 - 2a\cdot\frac{b+c}{2} + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + b^2 + c^2 - bc =$$
$$= \left(a - \frac{b+c}{2}\right)^2 + \frac{3b^2 - 6bc + c^2}{4} = \left(a - \frac{b+c}{2}\right)^2 + \frac{3(b-c)^2}{4},$$

может обращаться в нуль только при условии $a = b = c$. Применяя сказанное, запишем уравнение, эквивалентное данному:

$$(\sin x + \sin 2x + \sin 3x)\left(\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x - \sin x \sin 2x - \sin x \sin 3x - \sin 2x \sin 3x\right) = 0. \quad (*)$$

Отсюда:
1) либо

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

Тогда

$$2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 0.$$

Следовательно,

$$\sin 2x(2\cos x + 1) = 0,$$

т.е. либо

$$\sin 2x = 0$$

и

$$x = \frac{\pi k}{2},\ k \in Z,$$

либо

$$2\cos x + 1 = 0$$

и

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Равенство же нулю второй скобки в левой части уравнения (*), как ужу отмечалось, возможно только при условии $\sin x = \sin 2x = \sin 3x$, откуда $\sin x = 0$ и $x = \pi m,\ m \in Z$. Последняя же серия целиком содержится в первой из полученных ранее.

3. Ответ: 25 и 24 землекопа соответственно.

Пусть $x$ и $y$ – число землекопов в первой и второй бригадах соответственно, а $t\,(ч)$ – время, за которое первая бригада вырывает котлован. Тогда вторая бригада, согласно условию задачи, выполнит тот же объем работы за $t + \frac{1}{2}$ ($ч$), а бригада, в составе которой $x + 5$ землекопов, – за $t - 2$ ($ч$). Выражая объем выполненной работы в человеко-часах, получаем систему уравнений:

$$(x+5)(t-2) = xt = y\left(t + \frac{1}{2}\right),$$

в которой неизвестные $x$ и $y$ являются натуральными числами. Учитывая этот факт, исключим из системы неизвестное $t$. Так как из первого уравнения следует, что $t = \frac{2x+10}{5}$, то второе примет вид

$$\frac{(2x+10)x}{5} = y\left(\frac{2x+10}{5} + \frac{1}{2}\right)$$

или

$$4x^2 + 20x = (4x+25)y.$$

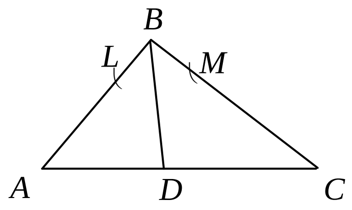
Поскольку $x$ и $y$ – натуральные, то перепишем последнее уравнение в виде

$$4y = 4x - 5 + \frac{125}{4x+25}$$

(для этого достаточно выразить из уравнения величину $y$ и выделить у получившейся дроби целую часть; коэффициент 4 появляется с той целью, чтобы в записи не было числовых дробей).

Отсюда, поскольку $x$ и $y$ – натуральные числа, следует, что число $4x+25$ должно быть натуральным делителем числа 125 и так как $4x+25>25$, то $4x+25=125$, т.е. $x=25$. Следовательно, $y=24$.

4. Ответ: $10\sqrt{2}$.




Пусть $L$ и $M$ – точки касания вписанной окружности со сторонами $AB$ и $BC$ соответственно. Тогда по свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки, имеем: $AL=AD=4$, $CM=DC=5$, $BL=BM$. Положим $BL=BM=x$. Тогда $AB=4+x$, $BC=5+x$. Теперь из треугольника $ADB$ по теореме косинусов найдем:

$$\cos\angle ADB=\frac{AD^2+BD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=\frac{16+\frac{89}{9}-(4+x)^2}{2\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{89}}{3}}.$$

Аналогично, применяя теорему косинусов к треугольнику $BDC$, имеем:

$$\cos\angle CDB=\frac{CD^2+BD^2-CB^2}{2CD\cdot BD}=\frac{25+\frac{89}{9}-(5+x)^2}{2\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{89}}{3}}.$$

Так как углы $ADB$ и $CDB$ – смежные, то $\cos\angle ADB=-\cos\angle CDB$. Следовательно, получаем уравнение

$$\frac{16+\frac{89}{9}-(4+x)^2}{2\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{89}}{3}}=-\frac{25+\frac{89}{9}-(5+x)^2}{2\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{89}}{3}}$$

или, после упрощения

$$9x^2+80x-89=0.$$

Его единственным положительным корнем является $x=1$.
Следовательно, в треугольнике $ABC$ стороны равны: $AC=9$, $AB=5$, $BC=6$. Тогда по формуле Герона

$$S_{ABC}=\sqrt{10\cdot 1\cdot 4\cdot 5}=10\sqrt{2}.$$

Замечание. Уравнение для определения величины $x$ можно было записать непосредственно, если использовать теорему Стюарта.

5. Ответ: $x=-\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{2}$.

Умножив первое уравнение системы на величину $2^{-x+y}\cdot 3^{2y}$, будем иметь:

$$3^{2y}-2\cdot 3^{x+y}-2^{-x-y}=0.$$

Теперь, сложив получившееся уравнение со вторым уравнением системы, получим:

$$3^{2y}-4\cdot 3^{x+y}+3\cdot 3^{2x}=0.$$

или, после почленного деления на $3^{2x}$,

$$\left(3^{y-x}\right)^2-4\cdot 3^{y-x}+3=0.$$

Отсюда

либо 1)

$$3^{y-x}=1.$$

Тогда

$$y=x$$

и, подставляя полученное выражение в первое уравнение исходной системы, получим уравнение

$$1-2-6^{-2y}=0,$$

которое не имеет решений;

либо 2)

$$3^{y-x}=3.$$

Тогда

$$y=x+1$$

и, подставляя полученное выражение в первое уравнение исходной системы, получим уравнение

$$\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{6}-6^{-2y}=0,$$

откуда $y=\frac{1}{2}$. Следовательно, $x=-\frac{1}{2}$.

6. Ответ: $S_{\min}=\max\limits_{1\le i\le k}\{l_i+2(i-1)\}$ при условии, что величины $l_i$ упорядочены по невозрастанию.

Для того чтобы в дыру в заборе прошел первый человек, ширина дыры должна быть не менее чем $l_1$ (*см*), для второго ширина дыры, учитывая ее уменьшение после прохода первого, должна быть не менее чем $l_2+2$ (*см*) и так далее: для прохода $i$-го ширина дыры должна быть не менее чем $l_i+2(i-1)$ (*см*). Чтобы прошли все, из полученных значений следует выбрать максимальное:

$$S=\max_{1\le i\le k}\{l_i+2(i-1)\}.$$

Очевидно, наименьшее значение величина $S$ примет в том случае, если пропуск осуществлять в порядке невозрастания ширины плеч, т.е. когда величины $l_i$ упорядочены по невозрастанию.