ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Белорусского государственного университета

XXIV ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ
для учащихся старших классов
средних общеобразовательных учреждений

Условия задач первого тура олимпиады

Задачи для учащихся 11 классов («Абитуриент БГУ – 2015»)

1. Найти четырехзначное натуральное число, у которого как две первые, так и две последние цифры одинаковы, а само число является квадратом некоторого натурального числа.
2. H – ортоцентр в треугольнике ABC, K – точка пересечения биссектрис углов CAH и CBH. Доказать, что прямая CK делит сторону AB пополам.
3. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} xy + yz + zx = 1, \\ \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \dfrac{2y}{1+y^2} = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}. \end{cases}$$

4. Для $a, b \in [0;1]$ доказать неравенство
$$\frac{a}{\sqrt{2a^2+5}} + \frac{b}{\sqrt{2b^2+5}} \le \frac{2}{\sqrt{7}}$$

5. Линейная функция $y = f(x)$ такова, что $f(0) = -5$, $f(f(0)) = -15$. Указать все значения m, для которых множество решений неравенства $f(x)f(m-x) > 0$ есть промежуток длиною 2.
6. Опишите алгоритм, который позволяет найти число, состоящее только из нулей и единиц (хотя бы одна единица есть обязательно), которое делится на 2015.

Задачи для учащихся 9-10 классов (творческая олимпиада по математике)

1. Решить неравенство $\min\left\{4, x + \dfrac{4}{x}\right\} \ge 8\min\left\{x, \dfrac{1}{x}\right\}$.

2. Три однозначных числа *a, b, c* образуют арифметическую прогрессию. Незнайка написал на доске: *a, ab, cc* и стал утверждать, что они тоже образуют арифметическую прогрессию. Знайка спросил: «Все ли Незнайка написал правильно?». «Не знаю, - сказал Незнайка, - но знаю, что задача имеет не менее трех решений». Знайка все же смог решить эту задачу, используя указанную Незнайкой информацию. Найдите и вы все возможные тройки исходных чисел *a, b, c.*

3. В остроугольном треугольнике ABC отрезок A_1B_1, соединяющий основания высот AA_1 и BB_1, виден из середины M стороны AB под прямым углом. Найти величину угла C.
4. В девятом классе некоторой школы каждый мальчик дружит с тремя девочками и четырьмя мальчиками, а каждая девочка дружит с четырьмя мальчиками и тремя девочками. Сколько школьников может учиться в этом классе, если известно, что их не более 35?
5. а) Найдите сумму всех несократимых дробей со знаменателем 5, содержащихся между числами 3 и 8 (каждая из этих дробей больше 3 и меньше 8).

   б) Найдите сумму всех несократимых дробей со знаменателем 5, содержащихся между натуральными числами m и n (каждая из этих дробей больше m и меньше n).

   в) Найдите сумму всех несократимых дробей со знаменателем p (p – простое число), содержащихся между натуральными числами m и n (каждая из этих дробей больше m и меньше n).

   г) Найдите сумму всех несократимых дробей вида $k/6$, содержащихся между натуральными числами m и n. Напишите общую формулу, а также значение этой суммы для $m = 3$ и $n = 8$.
6. Опишите алгоритм, который позволяет найти число, состоящее только из нулей и единиц (хотя бы одна единица есть обязательно), которое делится на 2015.

Задачи для учащихся 7-8 классов (подготовительная олимпиада по математике)

1. В семейном ансамбле «Ласковый лай» участвуют Тит Фомич, Фома Титович, Фома Фролович, Фрол Фомич, и Фрол Фролович Собакины. Один из них поет, его отец играет на шарманке, брат держит микрофон, а дети бьют в барабан. Как зовут певца?
2. По кругу сидят рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут – всего 2015 человек. Каждый из них знает всех, за исключением своих ближайших соседей. Все люди по очереди сказали: «Всех кого я знаю – лжецы». Сколько рыцарей сидит за столом?
3. Решите уравнение $abc = (ab)^2 - c^2$. (Здесь abc и ab означают соответственно трехзначное и двузначное число с цифрами a, b и c).
4. Прямоугольник разделен двумя перпендикулярными отрезками, параллельными сторонам, на четыре прямоугольника, площади трех из которых равны 2 см^2, 4 см^2, 6 см^2. Найдите возможные значения площади четвертого прямоугольника.
5. Можно ли поместить в квадрат 1×1 некоторое число непересекающихся окружностей, сумма радиусов которых будет больше 2015? Ответ поясните.
6. На столе лежат 2015 спичек. Двое по очереди могут брать m спичек ($1 \le m \le M$, где М – заданное натуральное число). Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Требуется выяснить, кто из игроков выигрывает: а) при $M = 2$; б) при $M = 3$; в) при $M = 6$. Как надо играть в этих случаях? Попробуйте дать ответ в общем случае, т.е. при произвольном натуральном значении M. (Ответ, конечно, будет зависеть от M.)