XXIII ОЛИМПИАДА ФПМИ **заключительный тур** (25 апреля 2015 года) **7-8 классы**

ВНИМАНИЕ. 1. В квадратных скобках рядом с номером задачи (пунктом) стоит максимальный балл, который можно получить за эту задачу (пункт).
2. Пользоваться калькулятором не разрешается.
3. Завтра – 26 апреля 2015 г. в 10.00 в ауд. 521 главного корпуса БГУ состоится разбор решений задач заключительного тура олимпиады ФПМИ, после которого можно будет посмотреть свои работы.
4. Закрытие олимпиады сразу после завершения разбора решений и просмотра работ в той же аудитории.

Условия задач

1. Существует ли действительное число x, такое что $(x+2015)(x+2016)(x+2017)(x+2018)=(x+2012)(x+2013)(x+2014)(x+2015)$.
2. Можно ли разделить 41 печенье поровну между 42 школьниками, учитывая, что каждое печенье можно резать на n равных частей, где n не равно 42. (для разных печений возможны различные n, т.е. одно печенье можно разделить, к примеру, на 5 равных частей, а другое – на 10 и т.д.)
3. В магазине было 7 коробок с конфетами известной кондитерской фабрики Lenya&Borya массой 2003, 2009, 2010, 2011, 2013, 2014 и 2015 г. Для проведения олимпиады ФПМИ БГУ деканат и ректорат взяли 6 коробок, причем ректорат взял по массе в 2 раза больше конфет, чем деканат. Определите, какая коробка с конфетами Lenya&Borya осталась в магазине.
4. Домино – это плитка размера 1×2 или 2×1. Определите количество различных способов расположить ровно n^2 плиток домино без наложений на шахматной доске размера $2n\times2n$ так, что каждый квадрат размера 2×2 содержит ровно две пустых клетки, которые находятся в одной и той же строке или в одном и том же столбце.
5. 8 одноклассников одновременно прочитали 8 анекдотов, причём каждый прочитал по одному анекдоту. Они стали встречаться друг с другом и обмениваться анекдотами. Каждый разговор длится 10 минут. За одну встречу можно рассказать друг другу сколько угодно анекдотов. Какое минимальное количество минут необходимо, чтобы все узнали все анекдоты?
6. AL –биссектриса угла A треугольника ABC (точка L лежит на стороне BC). Оказалось, что $AL=LB$. На луче AL отложен отрезок AK, равный CL. Докажите, что $AK=CK$.

XXIII ОЛИМПИАДА ФПМИ **заключительный тур** (25 апреля 2015 года)

9-10 классы

ВНИМАНИЕ.

1. Завтра – 26 апреля 2015 г. в 10.00 в ауд. 522 главного корпуса БГУ состоится разбор решений задач заключительного тура олимпиады ФПМИ, после которого можно будет посмотреть свои работы.
2. Закрытие олимпиады сразу после завершения разбора решений и просмотра работ в той же аудитории.
3. Пользоваться калькулятором не разрешается

Задания

1. Найти все пары простых чисел p и q, p≤q, удовлетворяющих равенству:

$$p(2q+1) + q(2p+1) = 2(p^2 + q^2).$$

2. Дан параллелограмм $ABCD$, такой что $\angle BAC = 40°$ и $\angle BCA = 20°$. На диагонали AC отмечены точки E и G, а на стороне AD – точки F и H так, что точки B, E, F лежат на одной прямой, $\angle ABG = \angle AHG = 90°$, $AF=EG$. Докажите, что $AF=HD$.
3. Для чисел $a_1, a_2, \cdots, a_{2015}$ верны равенства

$$a_{n+1} = f(a_n),\ n = 1, 2, \ldots, 2014,\ a_{2015} = 0,\ f(x) = \begin{cases} \frac{3x-6}{x-3}, \text{при } x < 3, \\ \sqrt[3]{\frac{x-4}{x-2}} + \sqrt{\frac{18x-53}{2x+3}}, \text{при } x \geq 3 \end{cases}.$$

   Найдите a_{41}.
4. Покажите, что в любой арифметической прогрессии из натуральных чисел с разностью, меньшей 2015, не может находиться 12 последовательных членов, являющихся простыми числами.
5. Пусть P(x) - многочлен степени n, такой, что $P(x) = 2^x$ для x = 1,2,...,n+1. Чему равны P(n+2) и P(n+3)?
6. Для проведения турнира собрались $n \geq 3$ теннисистов. У каждого из них есть рейтинг: число от 1 до n. Игрок с более высоким рейтингом всегда побеждает игрока с более низким (например, игрок с рейтингом 1 выигрывает у всех). Поэтому, чтобы турнир был интересным, его было решено проводить по такой схеме: всеми возможными способами выбираются три участника, после чего каждая пара из тройки играет между собой, а тот, кто не играет - судит этот матч. Победитель каждого матча получает 1 очко. При этом каждому участнику разрешено жульничать во время судейства (помогать выигрывать более слабому) столько раз, каков его (судьи) рейтинг. При каком наибольшем n в таком турнире самый слабый игрок может занять первое место?