XXIV ОЛИМПИАДА ФПМИ **заключительный тур** (23 апреля 2016 года) **7-8 классы**

ВНИМАНИЕ. 1. Пользоваться калькулятором не разрешается.

2. Завтра – 24 апреля 2016 г. в 10.00 в ауд. 521 главного корпуса БГУ состоится разбор решений задач заключительного тура олимпиады ФПМИ, после которого можно будет посмотреть свои работы.
3. Закрытие олимпиады сразу после завершения разбора решений и просмотра работ в той же аудитории.

Условия задач

1. 2014 карасей легче 2015 лещей, а 2015 карасей тяжелее 2016 окуней. Что тяжелее – лещ или окунь?
2. Несколько стеклянных шариков разложено в k кучек. Мальчик, располагающий неограниченным запасом шариков, может за один ход взять по одному шарику из каждой кучки или же добавить из своего запаса в одну из кучек столько шариков, сколько в ней уже есть. При каких k мальчик за несколько ходов сможет добиться того, что в каждой кучке не останется шариков?
3. Сколькими способами можно расставить 0 и 1 в клетки таблицы а) 3×3; б) $n\times m$, так чтобы суммы по строкам и столбцам оказались четными числами?
4. Четверо супергероев – Бэтмен, Человек-Паук, Железный Человек и Росомаха – собрались вместе и решили выяснить, кто из них счастливый. Указанные супергерои, как известно, увлекаются математикой, поэтому каждый из них окажется счастлив, если найдет такое простое число p, что $2p$ можно представить в виде суммы четырех квадратов последовательных неотрицательных целых чисел. Причем разным супергероям должны принадлежать различные числа. Могут ли все четыре героя оказаться счастливыми?
5. Из листа клетчатой бумаги размером 17×17 клеточек вырезали 35 квадратиков 2×2 (режут по линиям). Доказать, что из оставшейся части листа можно вырезать ещё хотя бы один такой же квадратик.
6. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O. Периметр треугольника ABC равен периметру треугольника ABD, а периметр треугольника ACD равен периметру треугольника BCD. Найти длину отрезка AO, если BO = 10 см.

XXIV ОЛИМПИАДА ФПМИ **заключительный тур**(23 апреля 2016 года)

9–10 классы

ВНИМАНИЕ. 1. Пользоваться калькулятором не разрешается.

2. Завтра – 24 апреля 2016 г. в 10.00 в ауд. 522главного корпуса БГУ состоится разбор решений задач заключительного тура олимпиады ФПМИ, после которого можно будет посмотреть свои работы.
3. Закрытие олимпиады сразу после завершения разбора решений и просмотра работ в той же аудитории.

Условия задач

1. Числовая последовательность задана формулой $a_n = \left[\sqrt{2n} + 0{,}5\right]$, (здесь квадратные скобки означают наибольшее целое число не превосходящее данное). Сколько раз в этой последовательности встречается число 1511?
2. На столе поставлены в ряд Nстаканов, перевернутые вверх дном. Разрешается одновременно переворачивать два стакана, стоящие через один. При каких значениях Nможнодобиться, чтобы того, чтобы все стаканы стояли дном вниз?
3. В парламенте 30 депутатов. Каждые два из них либо дружат, либовраждуют, причем каждый дружит ровно с 6 другими. Каждые 3 депутатаобразуют комиссию. Найдите общее число комиссий, в которых все тричлена попарно дружат или все трое попарно враждуют.
4. Докажите, что для любых значений xвыполняется неравенство
$$\sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{2}} + \sqrt{16 + x^2 - 4x\sqrt{2}} \geq 5.$$
5. Выпуклыйдвенадцатиугольник вписан в окружность. Шесть его сторон имеет длину $\sqrt{2}$, а остальные шесть – $\sqrt{24}$. Найдите радиус окружности.
6. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых число $3n^2 + 3n + 1$ является полным квадратом натурального числа.

Олимпиада «Абитуриент-БГУ-2016» по математике и информатике
II тур, 23 апреля 2016 года (заключительный)

1. Найти все натуральные n, для каждого из которых сумма $5^n + 4^n$ есть полный квадрат.
2. Пусть $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\alpha < \beta$. Определим острые углы γ и φ (т.е. $\gamma, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$) так, что $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{2}$ и $\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta}}{2}$. Доказать, что $\gamma < \varphi$.
3. 6 коров за 3 дня съедают траву на участке 0.2 га, 8 коров за 4 дня съедают траву на участке 0.3 га. Сколько дней смогут пастись 12 коров на участке площадью 0.6 га? Прирост травы на участке пропорционален его площади и времени.
4. Плоскость отсекает от боковых ребер SA, SB и SC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отрезки $SK = \frac{2}{3}SA$, $SL = \frac{1}{2}SB$, $SM = \frac{1}{2}SC$ соответственно. Длина бокового ребра пирамиды равна a. Найти длину отрезка SN, отсекаемого этой плоскостью от ребра SD.
5. При каких значениях y уравнение $(y + 3 - |x + 2|)(y + x^2 + 4x) = 0$ имеет ровно три корня?
6. Транспортная компания для перевозки сыпучего груза предлагает два типа автомобилей. Автомобиль первого типа за один рейс может перевезти Q_1 тонн груза, а стоимость одного рейса не зависит от загрузки автомобиля и равна P_1. Для автомобилей второго типа эти величины соответственно равны Q_2 и P_2. Определить минимальную стоимость перевозки A тонн груза. 1) Решите эту задачу для $Q_1 = 3$, $P_1 = 20$, $Q_2 = 20$, $P_2 = 100$, $A = 21$. 2) Предложите алгоритм для произвольных значений параметра.

Олимпиада «Абитуриент-БГУ-2016» по математике и информатике
II тур, 23 апреля 2016 года (заключительный)

1. Найти все натуральные n, для каждого из которых сумма $5^n + 4^n$ есть полный квадрат.
2. Пусть $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\alpha < \beta$. Определим острые углы γ и φ (т.е. $\gamma, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$) так, что $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{2}$ и $\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta}}{2}$. Доказать, что $\gamma < \varphi$.
3. 6 коров за 3 дня съедают траву на участке 0.2 га, 8 коров за 4 дня съедают траву на участке 0.3 га. Сколько дней смогут пастись 12 коров на участке площадью 0.6 га? Прирост травы на участке пропорционален его площади и времени.
4. Плоскость отсекает от боковых ребер SA, SB и SC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отрезки $SK = \frac{2}{3}SA$, $SL = \frac{1}{2}SB$, $SM = \frac{1}{2}SC$ соответственно. Длина бокового ребра пирамиды равна a. Найти длину отрезка SN, отсекаемого этой плоскостью от ребра SD.
5. При каких значениях y уравнение $(y + 3 - |x + 2|)(y + x^2 + 4x) = 0$ имеет ровно три корня?
6. Транспортная компания для перевозки сыпучего груза предлагает два типа автомобилей. Автомобиль первого типа за один рейс может перевезти Q_1 тонн груза, а стоимость одного рейса не зависит от загрузки автомобиля и равна P_1. Для автомобилей второго типа эти величины соответственно равны Q_2 и P_2. Определить минимальную стоимость перевозки A тонн груза. 1) Решите эту задачу для $Q_1 = 3$, $P_1 = 20$, $Q_2 = 20$, $P_2 = 100$, $A = 21$. 2) Предложите алгоритм для произвольных значений параметра.