ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Белорусского государственного университета

приглашает к участию

в олимпиаде по математике и информатике ФПМИ

XXVI ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

Условия задач первого тура олимпиады по математике и информатике

Задачи для учащихся 11 классов («Абитуриент БГУ – 2017»)

1. На факультет от выпускников лицеев подано на 600 заявлений больше, чем от выпускников гимназий. Девушек среди выпускников лицеев в 5 раз больше, чем девушек среди выпускников гимназий, а юношей среди выпускников лицеев больше, чем среди выпускников гимназий, в n раз (n – целое, $6 \le n \le 12$). Определить количество заявлений, если среди выпускников гимназий юношей на 20 больше, чем девушек.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y+z} = \dfrac{6}{5}, \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z+x} = \dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

3. BB_1 и CC_1 – биссектрисы углов B и C треугольника ABC соответственно. На продолжениях сторон AB и AC взяты точки M и L так, что $BM = BC = CL$. Доказать, что $ML \parallel B_1C_1$.

4. Известно, что для функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ выполнены неравенства $f(-3) < -5,\ \ f(-1) > 0,\ \ f(1) < 4$. Определить знак коэффициента a.

5. Найти наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 14x + 58}$.

6. Фирма выпускает прохладительные напитки в пластиковых бутылках различного объёма. Себестоимость бутылки складывается из себестоимости тары и себестоимости самого напитка. Первая величина не зависит от объёма бутылки, а вторая — пропорциональна объёму налитого напитка. Так, если себестоимость бутылки равна 10, а себестоимость одного литра напитка — 5, то суммарная себестоимость бутылки напитка объёмом в 1.5 литра будет равна 17.5.

   Известно, что суммарная себестоимость бутылки объёмом a_1 литра равна b_1, а объёмом a_2 литра — b_2. Рассчитайте суммарную себестоимость бутылки объёмом a_3 литра.

a) Решите эту задачу для случаев, описанных в таблице:

a_1	b_1	a_2	b_2	a_3
1	4	2	6	3
0,5	5,5	1,5	6,5	0,2
1	3,4	2,5	8,35	1,5

b) Предложите общий алгоритм решения задачи.

Задачи для учащихся 9-10 классов (творческая олимпиада по математике)

1. Найдите все тройки (a, b, c) натуральных чисел таких, что $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$
2. Квадрат разделили на прямоугольники, проведя несколько разрезов, параллельно его сторонам (от края до края). Оказалось, что сумма периметров этих прямоугольников в семь раз больше периметра исходного квадрата. Какое наибольшее количество прямоугольников могло получиться?
3. На факультет от выпускников лицеев подано на 600 заявлений больше, чем от выпускников гимназий. Девушек среди выпускников лицеев в 5 раз больше, чем девушек среди выпускников гимназий, а юношей среди выпускников лицеев больше, чем среди выпускников гимназий, в n раз (n – целое, $6 \le n \le 12$). Определить количество заявлений, если среди выпускников гимназий юношей на 20 больше, чем девушек.
4. Найти функцию, удовлетворяющую заданному уравнению:
$$f(x)+xf\left(\frac{x}{2x-1}\right)=2$$
5. BB_1 и CC_1 – биссектрисы углов B и C треугольника ABC соответственно. На продолжениях сторон AB и AC взяты точки M и L так, что $BM=BC=CL$. Доказать, что $ML \parallel B_1C_1$.
6. Найти наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2-14x+58}$.

Задачи для учащихся 7-8 классов (подготовительная олимпиада по математике)

1. Егор хочет найти количество способов, которыми можно переставить буквы в слове ОЛИМП так, чтобы между двумя гласными буквами стояли две согласные. Помогите ему найти количество способов.
2. Квадрат разделили на прямоугольники, проведя несколько разрезов, параллельно его сторонам (от края до края). Оказалось, что сумма периметров этих прямоугольников в семь раз больше периметра исходного квадрата. Какое наибольшее количество прямоугольников могло получиться?
3. В треугольнике ABC: $\angle B = 20°$, $\angle C = 40°$, длина биссектрисы AM равна 2 см. Найдите разность сторон: $BC - AB$.

4. Три шахматиста A, B и C сыграли матч-турнир (каждый с каждым сыграл одинаковое число партий). Может ли случиться, что по числу очков A занял первое место, C – последнее, а по числу побед, наоборот, A занял последнее место, C – первое (за победу присуждается одно очко, за ничью – пол-очка)?
5. Вдоль дороги расставлены светофоры на расстоянии 1 км друг от друга. В честь слета Юных математиков светофоры работают в следующем режиме: последнюю минуту каждого часа на всех светофорах горит красный свет, а все остальное время – зеленый. Мотоциклист 10 часов ехал по дороге с постоянной скоростью. Он ни разу не останавливался и не нарушал правила. Какое наибольшее расстояние мог проехать мотоциклист?
6. На одну из клеток шахматной доски высадился отряд из 64 десантников с целью захватить всю доску. Каждый день в каждой из клеток, в которых находятся десантники, происходит следующее: половина отряда отправляется в какую-нибудь не захваченную клетку, находящуюся на той же вертикали или на той же горизонтали. При этом новая клетка не обязательно должна быть соседней с исходной, но проходить через клетки, в которых десантники уже стоят – запрещено. Если отряд в какой-либо клетке не может разделиться , в этой клетке начинаются учения и все солдаты в ней погибают. Покажите, что независимо от того, в какую клетку был выброшен десант, через 6 дней каждый из 64 солдат сможет захватить по клетке.