XXV ОЛИМПИАДА ФПМИ

Заключительный тур

7-8 классы

1. Вычислить (ответ является целым или рациональным числом и не должен содержать знаков сложения и умножения):

$$\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}+\frac{2}{2017}+\frac{2}{2018}+\cdots+\frac{2016}{2017}+\frac{2016}{2018}+\frac{2017}{2017}+\frac{2017}{2018}+\frac{1}{2}.$$

Ответ: 2018.

Решение 1: Самое короткое решение использует формулу для суммы n первых натуральных чисел: $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Просуммируем отдельно дроби со знаменателями 2017 и 2018:

$$\frac{1}{2017}+\frac{2}{2017}+\cdots+\frac{2016}{2017}+\frac{2017}{2017}=\frac{1+2+\cdots+2017}{2017}=\frac{2017\cdot 2018}{2017\cdot 2}=\frac{2018}{2}.$$

$$\frac{1}{2018}+\frac{2}{2018}+\cdots+\frac{2016}{2018}+\frac{2017}{2018}=\frac{1+2+\cdots+2017}{2018}=\frac{2017\cdot 2018}{2018\cdot 2}=\frac{2017}{2}.$$

Таким образом, исходная сумма равна $\frac{2018}{2}+\frac{2017}{2}+\frac{1}{2}=2018.$

Решение 2: Еще одно решение основано на группировке слагаемых, - главное понять закономерность группировки.
Все дроби знаменателем, равным 2017, суммируем так

$$\frac{2017}{2017}=1$$

$$\frac{1}{2017}+\frac{2016}{2017}=1$$

$$\frac{2}{2017}+\frac{2017}{2017}=1$$

и так далее до

$$\frac{1013}{2017}+\frac{1014}{2017}=1,$$

т. е. всего имеем 1014 единиц.
Дроби со знаменателем, равным 2018, сгруппируем так:

$$\frac{1}{2018}+\frac{2017}{2018}=1,$$

$$\frac{2}{2018}+\frac{2016}{2018}=1,$$

$$\frac{1013}{2018} + \frac{1015}{2018} = 1,$$

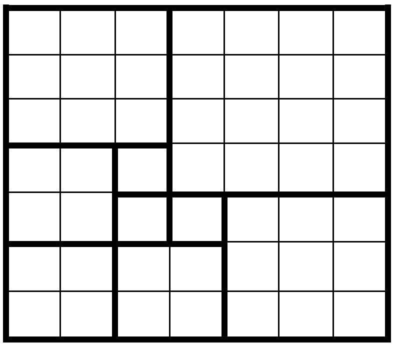
и останется одна дробь $\frac{1014}{2018} = \frac{1}{2}$.

Таким образом, имеем 2013 единиц и одну «половинку», да еще одна «половинка» в конце вычисляемой суммы, итого тоже 1014 единиц, а всего получается 2018.

2. Можно ли из квадратов, стороны которых выражаются натуральными числами, составить больший квадрат, не используя при этом более трех квадратов одинакового размера?

   Ответ: да, возможно.

   Решение: Рассмотрим клетчатый квадрат 7×7 и разрежем его следующим образом:



3. Коля и Петя по очереди берут из кучи из N камней число камней, равное одной из степеней двойки (Коля начинает первый). Выигрывает тот, после чьего хода в куче не останется камней. Кто выиграет при правильной игре соперника?

   Ответ: выиграет Коля, если N не делится на 3, иначе выиграет Петя.

   Решение: Заметим, что любая степень двойки не кратна трем, а значит, если в кучке находится кратное трём количество камней, не получится забрать их все за один ход. Если в определенный момент в кучке лежит $3k$ камней, то после одного хода в ней останется либо $3t + 1$, либо $3t + 2$ камней. Тогда после следующего хода, на котором взят 1 или 2 камня, в кучке окажется число камней, кратное трем. Следовательно, если один игрок будет постоянно оставлять в кучке число камней, камней, кратное трем, то второй игрок не сможет взять последний камень, то есть выиграть. Поэтому если изначально в кучке находится число камней, кратное трем, то выигрывает Петя, а если количество камней не кратно трем, то выигрывает Коля.

4. Есть 2018 красных, 2018 жёлтых 2018 зелёных и 2018 синих карандашей. Известно, что из любых трёх карандашей трёх разных цветов можно составить треугольник (т.е. для данных карандашей выполняется неравенство треугольника). Докажите, что найдётся такой цвет, что из любых трёх карандашей этого цвета можно составить треугольник.

   Решение: Упорядочим карандаши зеленого, желтого и красного цветов: $з_1 \leq з_2 \leq \ldots \leq з_{2018}$, $ж_1 \leq ж_2 \leq \ldots \leq ж_{2018}$, $к_1 \leq к_2 \leq \ldots \leq к_{2018}$. Не нарушая общности, положим $к_1 \leq ж_1 \leq з_1$. Рассмотрим карандаши $ж_1$, $к_1$ и $з_{2018}$. По условию из них можно составить треугольник, поэтому $з_{2018} < ж_1 + к_1$, и $з_{2018} < ж_1 + к_1 \leq з_1 + з_2$, следовательно, самый длинный карандаш из зеленого набора короче двух самых коротких карандашей из этого же набора. А это и означает, что для любой тройки зеленых карандашей выполняется неравенство треугольника.

5. Существуют ли такие натуральные числа a, b и c, что
$$a^3 + b^3 + c^3 = 1009^{1009}?$$

   Ответ: да, существуют.

   Решение: Заметим, что $1^3+2^3+10^3 = 1009$. Тогда для чисел $a = 1\cdot1009^{336}$, $b = 2\cdot1009^{336}$ и $c = 10\cdot1009^{336}$ выполняется условие задачи.

6. Четное число команд сыграли футбольный турнир в два круга. Сумма очков двух первых команд вдвое меньше суммы очков всех остальных команд. Каково наибольшее возможное число команд? (Напомним, что в футболе за победу команда получает 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков.)

   Ответ: 14 команд.

   Решение: Пусть количество команд равно $2n$. Две самые успешные команды сыграли (за два круга) $2(1 + 2(2n – 2)) = 8n – 6$ матчей, и, значит, набрали в сумме не более $3(8n – 6) = 24n – 18$ очков. Остальные $2n – 2$ команды сыграли между собой (за два круга) $(2n – 3)(2n – 2)=4n^2– 10n + 6$ матчей, в которых набрали в сумме не менее $8n^2– 20n + 12$. Так как первые две команды набрали в сумме в два раза меньше, чем все остальные, то $2(24n – 18) \geq 8n^2 - 20n + 12$, откуда $2n^2– 17n + 12 \leq 0$. Наибольшее натуральное n, при котором выполняется последнее неравенство, это 7 (чтобы в этом убедиться необязательно решать само квадратное неравенство, можно проверить простой подстановкой), поэтому всего команд 14. Пример на 14 команд строится исходя из предыдущих рассуждений.

7. а) Вдоль кольцевой дороги длиной 10 км стоят 10 столбов на одинаковых расстояниях между соседними столбами и с табличками, на которых написаны подряд числа от 1 до 10, по которым любой водитель может

понять, в каком месте дороги он находится. Однажды ночью группа хулиганов под руководством старухи Шапокляк попыталась перевесить таблички на столбах так, чтобы разность между числами на табличках любой пары соседних столбов была равна 3, 4 или 5. Смогут ли они это сделать? (Если да, то приведите пример, если нет, то обоснуйте это).

б) Тот же вопрос, но для участка прямолинейной дороги с 10 такими же столбами (ясно, что длина такой дороги равна 9 км).

в) Ответьте (с обоснованием) на вопросы, аналогичные вопросам пунктов а) и б) для соответствующих дорог с 14 табличками с номерами от 1 до 14.

Ответ: а) нет; б) да; в) да, да.

Решение: а) Проанализируем, какие таблички (столбы) могут оказаться соседними при перестановке их хулиганами. Нам достаточно проверить таблички с номерами 1, 2, 3, 9 и 10:

1 – 4, 5, 6;
2 – 5, 6, 7;
3 – 6, 7, 8;
9 – 4, 5, 6;
10 – 5, 6, 7.

Сразу видно, что они (таблички с числами 1,2,3,9,10) не могут быть рядом, а значит, на кольцевой дороге должны располагаться через одну в каком-то порядке, а между ними стоять по одной из оставшихся. Однако, из этого же анализа (см. вышеприведенный список) видно, что табличка с номером 8 может быть рядом только с номером 3 из этих пяти указанных номеров. Значит, такая расстановка невозможна.

б) Смогут. Пример: 1 – 6 – 2 – 7 – 3 – 8 – 4 – 9 – 5 – 10.

Как и раньше номера 1,2,3,9,10 не располагаются рядом, но у 1 и 10 нет второго соседа. Поэтому номера можно немного «растянуть», и, например, между 3 и 9 поставить две таблички 8 и 4, как реализовано в данном примере. Ясно, что примеры могут быть и другие.

в) Пример для прямолинейной дороги (один из вариантов):

1 – 4 – 8 – 5 – 2 – 6 – 3 – 7 – 11 – 14 – 10 – 13 – 9 – 12.

Пример для кольцевой дороги:

1 – 5 – 2 – 6 – 3 – 8 – 11 – 14 – 10 – 13 – 9 – 12 – 7 – 4 и далее снова 1.