Олимпиада «Абитуриент-БГУ-2018» по математике и информатике
II тур, 21 апреля 2018 года (заключительный)

1. Решить уравнение $\dfrac{8}{x-8}+\dfrac{10}{x-6}+\dfrac{12}{x-4}+\dfrac{14}{x-2}=4$.
2. Решить уравнение $\log_{6-x}\log_2 x=\log_{7-x}\log_2(2x)$.
3. Купил Роман раков, вчера – мелких, по цене 510 рублей за штуку, а сегодня – по 990, но очень крупных. Всего на раков он истратил 25200 рублей, из них переплаты из-за отсутствия сдачи составили от 160 до 200 рублей. Сколько раков купил Роман вчера и сколько сегодня?
4. Найти хотя бы один такой многочлен третьей степени $P_3(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, чтобы при $|x|\le\dfrac{1}{2}$ выполнялось неравенство $\left|\dfrac{x-1}{x+1}-P_3(x)\right|\le\dfrac{1}{4}$.
5. Длина каждого ребра треугольной пирамиды $SABC$ равна 1, BD – высота треугольника ABC. Равносторонний треугольник BDE лежит в плоскости, образующей угол φ с ребром AC, причем точки S и E лежат по одну сторону от плоскости ABC. Найти расстояние между точками S и E.
6. Имеются кубики трех цветов: синий, зеленый и красный, в количестве k_1, k_2 и k_3 соответственно, $0\le k_1,k_2,k_3\le 9$. Из них можно составить столбик высотой $k_1+k_2+k_3$. Столбик будем называть красивым, если в нем нет трех подряд идущих кубиков одного цвета и четырех подряд идущих кубиков только 2-х цветов. Описать алгоритм, который определяет, сколько всего красивых различных столбиков можно построить для заданных k_1, k_2 и k_3.

XXV ОЛИМПИАДА ФПМИ **заключительный тур** (21 апреля 2018 года) **9-10 классы**

ВНИМАНИЕ.

1. Пользоваться калькулятором не разрешается.
2. Завтра – 22 апреля 2018 г. в 10.00 в ауд. 522 главного корпуса БГУ состоится разбор решений задач заключительного тура олимпиады ФПМИ, после которого можно будет посмотреть свои работы.
3. Закрытие олимпиады сразу после завершения разбора решений и просмотра работ в той же аудитории.

Условия задач

1. Дан многочлен $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$. Известно, что каждое из уравнений $f(x) = 1$ и $f(x) = 2$ имеет четыре корня. Известно, что для корней первого уравнения выполняется равенство $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, можно ли утверждать, что для корней второго уравнения выполняется аналогичное равенство.

2. Дан равнобедренный треугольник ABC с углом β при вершине B. В этой вершине расположен прожектор, который может освещать некоторый отрезок MN на основании AC (точка M лежит между A и N, точка N лежит между M и C). Известно, что при любом повороте прожектора из отрезков AM, MN и NC можно составить треугольник. Каким может быть угол освещения MBN?

3. а) Вдоль кольцевой дороги длиной 10 км стоят 10 столбов на одинаковых расстояниях между соседними столбами и с табличками, на которых написаны подряд числа от 1 до 10, по которым любой водитель может понять, в каком месте дороги он находится. Однажды ночью группа хулиганов под руководством старухи Шапокляк попыталась перевесить таблички на столбах так, чтобы разность между числами на табличках любой пары соседних столбов была равна 3, 4 или 5. Смогут ли они это сделать? (Если да, то приведите пример, если нет, то обоснуйте это).

б) Тот же вопрос, но для участка прямолинейной дороги с 10 такими же столбами (ясно, что длина такой дороги равна 9 км).

в) Ответьте (с обоснованием) на вопросы, аналогичные вопросам пунктов а) и б) для соответствующих дорог с 14 табличками с номерами от 1 до 14.

4. Есть таблица $n \times n$. В каждой клетке таблицы изначально стоит 0. Боря с Женей решили сыграть в игру. Сначала они по очереди делают k действий следующего вида: за одно действие любой игрок может прибавить по 1 ко всем клеткам одного любого столбца или строки. Далее игроки, в получившейся таблице, по очереди делают в точности обратные действия, отнимают по 1 от всех клеток одного любого столбца или строки. Проигрывает тот после чьего хода в таблице появилось отрицательное число. При этом каждый из двух этапов игры начинает Боря. Кто победит при правильной игре при А) четном k? Б) нечетном k?

5. Царь Горох по случаю рождения наследника решил устроить большой праздник и для этого приготовил 240 бочек вина. Однако Кощей Бессмертный смог подсыпать яд в одну из бочек. У царя есть 5 волшебных камней со следующим свойством: если камень окунуть в отравленное вино, то он почернеет в течение часа (в какой момент – неизвестно). До праздника осталось ровно два часа.. Объясните, каким образом можно найти отравленную бочку. (Кроме данных бочек у царя есть и пустые сосуды. Почерневший камень обратно не восстанавливается)

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что биссектрисы углов BAC и BDC пересекаются в точке E под углом $90°$. Доказать, что середина AD, середина BC и точка E лежат на одной прямой.

XXV ОЛИМПИАДА ФПМИ **заключительный тур** (21 апреля 2018 года) **7-8 классы**

ВНИМАНИЕ.

1. Пользоваться калькулятором не разрешается.
2. Завтра – 22 апреля 2018 г. в 10.00 в ауд. 521 главного корпуса БГУ состоится разбор решений задач заключительного тура олимпиады ФПМИ, после которого можно будет посмотреть свои работы.
3. Закрытие олимпиады сразу после завершения разбора решений и просмотра работ в той же аудитории.

Условия задач

1. Вычислить (ответ является целым или рациональным числом и не должен содержать знаков сложения и умножения):
$$\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}+\frac{2}{2017}+\frac{2}{2018}+\cdots+\frac{2016}{2017}+\frac{2016}{2018}+\frac{2017}{2017}+\frac{2017}{2018}+\frac{1}{2}.$$
2. Можно ли из квадратов, стороны которых выражаются натуральными числами, составить больший квадрат, не используя при этом более трех квадратов одинакового размера?
3. Коля и Петя по очереди берут из кучи из N камней число камней, равное одной из степеней двойки (Коля начинает первый). Выигрывает тот, после чьего хода в куче не останется камней. Кто выиграет при правильной игре соперника?
4. Есть 2018 красных, 2018 жёлтых 2018 зелёных и 2018 синих карандашей. Известно, что из любых трёх карандашей трёх разных цветов можно составить треугольник (т.е. для данных карандашей выполняется неравенство треугольника). Докажите, что найдётся такой цвет, что из любых трёх карандашей этого цвета можно составить треугольник.
5. Существуют ли такие натуральные числа a, b и c, что
$$a^3+b^3+c^3=1009^{1009}?$$
6. Четное число команд сыграли футбольный турнир в два круга. Сумма очков двух первых команд вдвое меньше суммы очков всех остальных команд. Каково наибольшее возможное число команд? (Напомним, что в футболе за победу команда получает 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков.)
7. а) Вдоль кольцевой дороги длиной 10 км стоят 10 столбов на одинаковых расстояниях между соседними столбами и с табличками, на которых написаны подряд числа от 1 до 10, по которым любой водитель может понять, в каком месте дороги он находится. Однажды ночью группа хулиганов под руководством старухи Шапокляк попыталась перевесить таблички на столбах так, чтобы разность между числами на табличках любой пары соседних столбов была равна 3, 4 или 5. Смогут ли они это сделать? (Если да, то приведите пример, если нет, то обоснуйте это).

   б) Тот же вопрос, но для участка прямолинейной дороги с 10 такими же столбами (ясно, что длина такой дороги равна 9 км).

   в) Ответьте (с обоснованием) на вопросы, аналогичные вопросам пунктов а) и б) для соответствующих дорог с 14 табличками с номерами от 1 до 14.