Решения задач первого тура олимпиады по математике и информатике

<u>Задачи для учащихся 11 классов</u> («Абитуриент БГУ – 2019»)

1. *На базе имеется несколько автомашин равной грузоподъемности. Для перевозки груза каждая автомашина сделала одно и то же число рейсов, а затем 7 машин сделали еще по 12 рейсов каждая. Если бы каждая машина сделала бы на 6 рейсов больше, то для перевозки в 2 раза меньшего груза потребовалось бы на 7 машин меньше. Сколько машин было на базе?*

Ответ: 14 в правильной формулировке и неопределен в озвученной.

Решение. К сожалению, в условие задачи «вкралась» малозаметная, но очень «вредная» опечатка: вместо буквы «**в**» в слове «равной» была напечатана буква «**з**», что сразу же сделало задачу неопределенной, т.е. имеющей бесконечно много решений (в том числе и соответствующее правильной постановке задачи). Поэтому мы приводим решение задачи в правильной постановке с небольшим комментарием по существу задачи получившейся. Итак, пусть количество машин, имевшихся на базе, равно m, грузоподъемность каждой из них равна p тонн, и каждая автомашина совершила по n рейсов. В результате было перевезено mnp тонн груза. После этого 7 автомашин , совершив по 12 рейсов каждая, перевезли еще $12 \cdot 7 \cdot p = 84p$ тонн груза. Таким образом, всего при указанной схеме перевозок было перевезено $P_1 = p(mn + 84)$ тонн груза. Рассуждая аналогично, получаем, что при второй схеме перевозок было перевезено $P_2 = p(m-7)(n+6)$ тонн груза, и поскольку по условию $P_2 = \frac{1}{2}P_1$, то после сокращения на p получаем уравнение

$$mn + 84 = 2(m-7)(n+6)$$

или, после раскрытия скобок и приведения подобных,

$$(m-14)(n+12) = 0. \qquad (1)$$

Отсюда $m = 14$.

Теперь о немного о получившейся в результате опечатки задаче. В этом случае, очевидно, грузоподъемность i-й автомашины будет p_i, $i = 1,...,m$, а масса перевезенного по первой схеме груза составит

$$P_1 = (p_1 + \ldots + p_m)n + 12(p_{i_1} + \ldots + p_{i_7}),$$

где $(i_1,...,i_7)$ – любое сочетание из 7 элементов (их общее количество равно C_m^7).

Точно так же

$$P_2 = \left(p_{j_1} + \ldots + p_{j_{m-7}}\right)(n+6)$$

где $(j_1,..., j_{m-7})$ – любое сочетание из $m-7$ элементов (их общее количество равно C_m^{m-7}). В итоге вместо уравнения необходимо рассматривать любое из $C_m^7 \cdot C_m^{m-7}$ уравнений вида

$$(p_1 + \ldots + p_m)n + 12\left(p_{i_0} + \ldots + p_{i_7}\right) = 2\left(p_{j_1} + \ldots + p_{j_{m-7}}\right)(n+6),$$

каждое из которых содержит $m+2$ неизвестных и, очевидно, имеет бесконечно много решений.

2. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} x^3 - xyz = 1, \\ y^3 - xyz = 2, \\ z^3 - xyz = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$

Ответ: Система не имеет решений.
Решение: Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x^3 = xyz + 1, \\ y^3 = xyz + 2, \\ z^3 = xyz + \dfrac{4}{3}, \end{cases}$$

и, перемножая уравнения почленно, получим уравнение следствие

$$(xyz)^3 = (xyz+1)(xyz+2)\left(xyz + \frac{4}{3}\right)$$

или

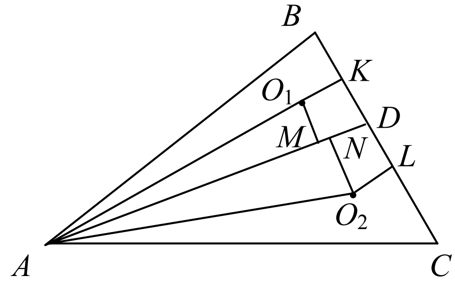
$$\frac{13}{3}(xyz)^2 + 6(xyz) + \frac{8}{3} = 0,$$

которое является квадратным относительно переменной (xyz) и не имеет вещественных корней ввиду отрицательности его дискриминанта.

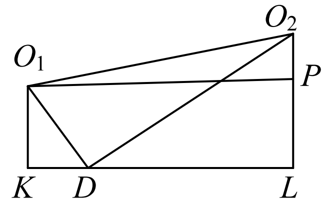
3. *В углы B и C треугольника ABC вписаны окружности радиусов 2 и 3 соответственно, касающиеся биссектрисы угла A. Найти длину этой бис-*

сектрисы, если расстояние между точками, в которых окружности касаются стороны BC, равно 7.

Ответ: 16.



Решение: Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей, вписанных в углы B и C соответственно, M и N – точки касания этих окружностей с биссектрисой AD, K и L – со стороной BC. Поскольку окружности с центрами в точках O_1 и O_2 вписаны в треугольники ABD и ACD соответственно, то сами точки O_1 и O_2 являются точками пересечения биссектрис внутренних углов этих треугольников. При этом $O_1K \perp BC$, $O_1M \perp AD$, $O_2L \perp BC$, $O_2N \perp AD$. Рассмотрим прямоугольную трапецию O_1O_2LK и проведем в ней $O_1P \perp O_2L$. Тогда $O_1P = KL = 7$, $O_2P = O_2L - PL = O_2L - PL = 1$ и по теореме Пифагора $O_1O_2 = \sqrt{O_1P^2 + O_2P^2} = 5\sqrt{2}$. Заметим, что $O_1D \perp O_2D$ (как биссектрисы смежных углов). Поэтому, положив $KD = x$, последовательно получаем:



$$DL = 7 - x,\ O_1D^2 = O_1K^2 + KD^2 = 4 + x^2,\ O_2D^2 = O_2L^2 + DL^2 = 9 + (7 - x)^2,$$

откуда

$$O_1O_2^2 = O_1D^2 + O_2D^2$$

и, таким образом,

$$4 + x^2 + 9 + (7 - x)^2 = 50$$

или

$$x^2 - 7x + 6 = 0.$$

Отсюда

$$x = 1,$$

либо

$$x = 6.$$

Из прямоугольных треугольников AMO_1 и ANO_2 следует, что $AN > AM$. Действительно, поскольку AO_1 – биссектриса $\angle BAD$, а AO_2 – биссектриса $\angle DAC$ и $\angle BAD = \angle DAC$, так как AD – биссектриса $\angle A$, то $\angle O_1AM = \angle O_2AN = \alpha$. Поэтому $AN = O_2N \operatorname{ctg}\alpha = 3\operatorname{ctg}\alpha > 2\operatorname{ctg}\alpha = O_1M \operatorname{ctg}\alpha = AM$. Поэтому $MD > ND$. Но по свойству касательных $MD = KD$, $ND = DL$. Следовательно, $KD > DL$ и, значит, $x = KD = 6$, $LD = 7 - x = 1$. Теперь, используя равенство $AD = AM + MD = AN + ND$, получаем:

$$2\operatorname{ctg}\alpha + 6 = 3\operatorname{ctg}\alpha + 1.$$

Отсюда $\operatorname{ctg}\alpha = 5$ и $AD = AM + MD = 2\operatorname{ctg}\alpha + 6 = 2\cdot 5 + 6 = 16$.

4. *Найти значение выражения* $\dfrac{1-4\sin 10^\circ}{\operatorname{tg} 20^\circ} - \operatorname{tg} 40^\circ$.

Ответ: 0.
Решение: Представляя тангенсы в виде отношения синусов и косинусов, преобразуем заданное выражение следующим образом:

$$A = \frac{1-4\sin 10^\circ}{\operatorname{tg} 20^\circ} - \operatorname{tg} 40^\circ = \frac{(1-4\sin 10^\circ)\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} - \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 20^\circ \cos 40^\circ - 4\sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 20^\circ \sin 40^\circ}{\sin 20^\circ \cos 40^\circ} =$$

$$= \frac{(\cos 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 20^\circ \sin 40^\circ) - 4\sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ}{\sin 20^\circ \cos 40^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 60^\circ - \dfrac{4\sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ}{\cos 10^\circ}}{\sin 20^\circ \cos 40^\circ} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ}{\cos 10^\circ}}{\sin 20^\circ \cos 40^\circ} = \frac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\cos 10^\circ}}{\sin 20^\circ \cos 40^\circ} = \frac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sin 80^\circ}{2\cos 10^\circ}}{\sin 20^\circ \cos 40^\circ} = 0.$$

5. *Верно ли, что во множестве корней уравнения* $x^2 - 8[x] + 7 = 0$ ($[x]$ *– целая часть* x) *найдутся два на расстоянии, меньшем 1 друг от друга.*

Ответ: Да. Корнями уравнения являются $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{33}$, $x_3 = \sqrt{41}$, $x_4 = 7$.
Решение: Пусть $n = [x]$ – целая часть x, и $\alpha = \{x\}$ – дробная часть x. Тогда согласно определению $x = n + \alpha$, причем $0 \le \alpha < 1$. Подставляя записанное для x выражение в заданное уравнение, перепишем последнее в виде

$$(n+\alpha)^2 - 8n + 7 = 0.$$

Отсюда при условии $8n - 7 \ge 0$, т.е. $n \ge 1$ находим:

$$\alpha = -n + \sqrt{8n-7}$$

(второй корень, учитывая неотрицательность α и положительность n, отбрасываем). Используя полученное для α выражение, найдем натуральные значения n, при которых α попадает в указанный выше промежуток. Имеем двойное неравенство

$$0 \le -n + \sqrt{8n-7} < 1$$

или

$$n \le \sqrt{8n-7} < n+1.$$

Возводя последнее неравенство почленно в квадрат (все его части положительны), перепишем его в виде

$$n^2 \le 8n - 7 < n^2 + 2n + 1.$$

Правая часть данного двойного неравенства есть неравенство

$$n^2 - 6n + 8 > 0,$$

решение которого – $n \in (-\infty;2) \cup (4;+\infty)$. Соответственно, левая часть дает неравенство

$$n^2 - 8n + 7 \le 0$$

с решением $n \in [1;7]$.

Таким образом, решением двойного неравенства является множество $n \in [1;2) \cup (4;7]$ или, учитывая, что n – целое, $n \in \{1,5,6,7\}$. Подставляя найденные значения n в формулу

$$x = n + \alpha = n - n + \sqrt{8n-7} = \sqrt{8n-7},$$

находим корни исходного уравнения:

$$x_1 = 1;\ x_2 = \sqrt{33};\ x_3 = \sqrt{41};\ x_4 = 7.$$

Из этих корней две пары ($\{x_2, x_3\}$ и $\{x_3, x_4\}$) удовлетворяют условию задачи.

6. *Имеется $2n$ целых чисел, величина каждого из которых по модулю не превышает 10^{10}. Необходимо определить, можно ли их разбить на пары таким образом, чтобы произведение в парах было одинаковым.*

   Легко видеть, что положительный ответ на поставленный вопрос возможен лишь в том случае, если в паре перемножаются наибольшее по модулю и наименьшее по модулю из чисел. Если перемножаются наибольше по модулю число с числом, по модулю большим, чем наименьшее, то, очевидно, наименьшее по модулю число ни с каким другим числом в паре это произведение не «достанет». Поэтому алгоритм решения поставленной задачи может выглядеть следующим образом: сортируем числа по возрастанию (или убыванию) модулей. После этого образуем пары из элементов, находящихся на одинаковом расстоянии от начала и конца получившегося массива. Если получившиеся произведения одинаковы, то ответ на вопрос задачи положительный, если нет – отрицательный.