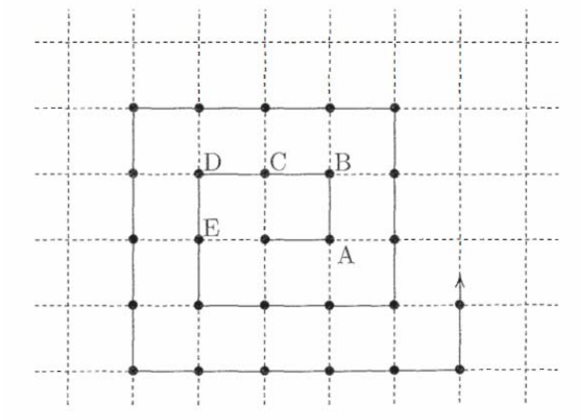
Задачи для учащихся 7-8 классов

(подготовительная олимпиада по математике, 1-й тур)

1. Игорь выбрал пять чисел из множества {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Если бы он сказал Юре произведение выбранных чисел, то этого было бы недостаточно чтобы выяснить вопрос о чётности суммы выбранных чисел. Каково произведение выбранных чисел?
2. Безумный таракан возомнил себя математиком. Введя координатную плоскость на листе клетчатой бумаги, так что координаты узлов сетки – точки с целочисленными значениями (x, y), начал путешествовать по линиям сетки по спирали, последовательно останавливаясь в узлах сетки, следующим образом: начав с центра листа – точки с координатами (0,0), он первые пять остановок делает в точках с координатами A (1,0), B (1,1), C(0,1), D (-1, 1) и E(-1, 0) и так далее (см. рис.). В частности, девятая остановка будет в точке с координатами (2, -1). Какие координаты будут у точки, в которой таракан сделает: а) 50-ю остановку; б) 100-ю остановку; в) 2019-ю остановку?



3. Пусть n – наименьшее целое положительное число, которое кратно 75 и имеет ровно 75 делителей, включая 1 и 75. Найдите $n/75$.
4. В городе A живет 2018 школьников, а в городе B – 2019 школьников. Расстояние между городами 1 км. Где нужно построить школу, чтобы сумма расстояний, ежедневно проходимых школьниками, была наименьшей?
5. У аптекаря есть набор гирек с весами 1 г, 2 г, 3 г, 4 г,..., n г (всего n штук). При каких n их можно ли их разложить их на 3 равные по весу кучки и как это сделать.
6. В результате измерения четырех сторон и одной из диагоналей некоторого четырехугольника получились числа 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Чему равна диагональ? Попробуйте указать границы, в которых может находиться значение длины второй диагонали.

Решения 1-го тура олимпиады ФПМИ в 7-8 классах

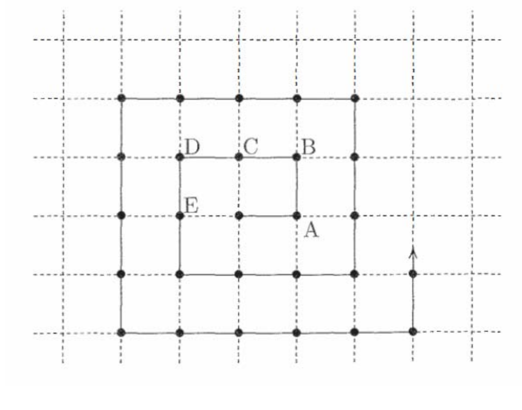
№ 1. Игорь выбрал пять чисел из множества {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Если бы он сказал Юре произведение выбранных чисел, то этого было бы недостаточно чтобы выяснить вопрос о чётности суммы выбранных чисел. Каково произведение выбранных чисел?

Ответ: 420.

Решение. Произведение всех семи чисел равно 7! = 5040. Произведение 5 чисел можно получить вычеркиванием из произведения двух каких-то сомножителей, которые не будут участвовать и в сумме. При этом и произведение таких пяти чисел получится из 5040 делением на произведение выброшенных двух чисел. Если произведение двух чисел из 7 определяется однозначно (т.е. отличается от других попарных произведений), то и произведение пяти чисел и сами эти 5 чисел определяются однозначно.

Так как 3*4=2*6=12 и 1*6=2*3=6, то двусмысленность в задаче возможна лишь с участием этих пар чисел {3,4}, {2, 6}, {1, 6} или {2, 3}. Рассмотрим пары, дающие произведение 6, сумму и произведение чисел в которых эта пара не участвует: 1*4*5*6*7 и 2*3*4*5*7 в обоих случаях сумма цифр, участвующих в произведении будет нечетной, но в этих случаях Юра бы точно определил чётность суммы. Значит, в выбранных цифрах не участвовали цифры дающие в произведении 12. Действительно сумма цифр в произведении 1*2*5*6*7 нечетная, а в произведении 1*3*4*5*7 – чётная. Значит, произведение будет равно (1*2*3*4*5*6*7)/12=420

№ 2. Безумный таракан возомнил себя математиком. Введя координатную плоскость на листе клетчатой бумаги, так что координаты узлов сетки – точки с целочисленными значениями (x, y), начал путешествовать по линиям сетки по спирали, последовательно останавливаясь в узлах сетки, следующим образом: начав с центра листа – точки с координатами (0,0), он первые пять остановок делает в точках с координатами A (1,0), B (1,1), C(0,1), D (-1, 1) и E(-1, 0) и так далее (см. рис.). В частности, девятая остановка будет в точке с координатами (2, -1). Какие координаты будут у точки, в которой таракан сделает: а) 50-ю остановку; б) 100-ю остановку; в) 2019-ю остановку?



Краткое решение: Точка с координатами (n, -n) будет пройдена на остановке $(2n+1)^2 - 1$ (количество целых точек в квадрате со стороной (2n+1) минус одна – начало координат, из которой таракан стартовал), тогда точка (0, -n) будет пройдена на остановке равной $(2n+1)^2 - (n+1)$. От этого и будем отталкиваться при подсчете требуемых координат точек. В частности, в п. а) имеем $50 = 7^2 + 1$, а 48-ю остановку, т.е. остановку с номером $48 = 7^2 - 1$, таракан сделает в точке с координатами (3, -3), значит, 50-ю в точке (4, -2).

Аналогично, в п. б) 100-ю остановку в точке (-5, 5),
в п. в) 2019-ю остановку в точке (17, -22).

№ 3. Пусть n – наименьшее целое положительное число, которое кратно 75 и имеет ровно 75 делителей, включая 1 и 75. Найдите n/75.

Ответ: 432.

Решение. Делителей – $75 = 3^1 5^2$ = (*) = (2+1)(4+1)(4+1) = $3 \cdot 25$ = (**) = (2+1)(24+1) = $5 \cdot 15$ = (***) = (4+1)(14+1) = 75 = (****) = (74+1) (здесь указаны все возможности разложения числа 75 на нетривиальные (т.е. большие 1) множители, всего четыре случая). Каждое из этих разложений соответствует некоторому разложению числа n на простые множители в соответствии с основной теоремой арифметики. Так как n делится на 75, то в разложении числа n входят простые числа 5, 3. Поэтому случай (****) отпадает, случаю (**) соответствуют такие возможные значения n: $5^2 \cdot 3^{24}$ или $3^2 \cdot 5^{24}$, а случаю (***) соответствуют $5^4 \cdot 3^{14}$ или $3^4 \cdot 5^{14}$. Чтобы число было наименьшим, в его разложение включим ещё и 2, что возможно в случае (*). Осталось подобрать степени к данным числам. Минимальное значение $n = 2^4 3^4 5^2$, ясно, что это наименьшее из всех указанных, тогда n/75=432.

№ 4. В городе А живет 2018 школьников, а в городе В – 2019 школьников. Расстояние между городами 1 км. Где нужно построить школу, чтобы сумма расстояний, ежедневно проходимых школьниками, была наименьшей?

Ответ: в городе *B*.

Решение. Ясно, что школа должна находится на отрезке *AB*. Рассмотрим пару школьников: один живет в *A*, второй – в *B*. Заметим, что где бы на *AB* ни находилась школа, учащиеся из этой пары каждый день вместе проходят расстояние, равное 2*AB*. Если разбить всех школьников на 2018 таких пар, то останется один школьник из *B*. Школьники, разбитые на пары, в любом случае пройдут за день расстояние $2018 \cdot 2AB$, поэтому чтобы минимизировать суммарное расстояние, нужно уменьшить длину пути, проходимую последним школьником, живущим в *B*. Это значит, что школу нужно построить в *B*.

№ 5. У аптекаря есть набор гирек с весами 1 г, 2 г, 3 г, 4 г,..., *n* г (всего *n* штук). При каких *n* их можно ли их разложить их на 3 равные по весу кучки и как это сделать.

Ответ. При n = 3k+2 и n = 3k+3, где k – любое натуральное число.

Решение. При n = 1, 2 и 3 разложить монеты на три равные кучки нельзя (это совсем очевидно). При n = 3k+1, где k – любое натуральное число, разложить на три равные кучки нельзя, потому что сумма весов всех монет не делится нацело на 3. Покажем, что при остальных n требуемое разложение возможно.

Случаи n = 5, 6, 8, 9 проверяются непосредственно. В частности, при n = 5 можем разложить монеты на такие кучки: {1, 4}, {2, 3}, {5}. При n = 6 – на такие: {1, 6}, {2, 5}, {3, 4}. При n = 8 – на такие: {1, 5, 6}, {2, 3, 7}, {4, 8}. При n = 9 – на такие: {1, 6, 8}, {2, 4, 9}, {3, 5, 7}. И, вообще, мы всегда можем разложить на три равные кучки любые 6 подряд идущих по весу монет, то есть, если монеты весят x +1, x + 2, x + 3, x + 4, x + 5, x +6, то кучки будут такие {x+1, x+6}, {x+2, x+5}, {x+3, x+4} (сравни случай с шестью монетами).

Для всех остальных случаев будем осуществлять разложение, следуя такому алгоритму:

- для n = 3k+2, если k – нечетно, то представим n = 5 + 3(k-1) и затем первые пять монет разложим так, как описано выше, а все остальные монеты разбиваются на шестерки последовательно идущих по весу монет (ведь k-1 – это уже четное число), причем каждую шестерку мы тоже раскладывать умеем. Осталось объединить полученные равные по весу группы монет в три большие равные кучки.

- для n = 3k+2, если k – четно, то представим n = 8 + 3(k-2) и затем первые восемь монет разложим так, как описано выше, а все остальные монеты вновь разбиваются на шестерки последовательно идущих по весу монет, причем каждую шестерку мы тоже раскладывать умеем. Осталось объединить полученные равные по весу группы монет в три большие равные кучки.

- для n = 3k+3, если k – нечетно, то представим n = 3(k+1) и все монеты разбиваются на шестерки последовательно идущих по весу монет (ведь k+1 – это уже четное число), причем каждую шестерку мы тоже раскладывать умеем. Осталось объединить полученные равные по весу группы монет в три большие равные кучки.

- для n = 3k+3, если k – четно, то представим n = 9 + 3(k-2) и затем первые девять монет разложим так, как описано выше, а все остальные монеты вновь разбиваются на шестерки последовательно идущих по весу монет, причем каждую шестерку мы тоже раскладывать умеем. Осталось объединить полученные равные по весу группы монет в три большие равные кучки.

№ 6. В результате измерения четырех сторон и одной из диагоналей некоторого четырехугольника получились числа 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Чему равна диагональ? Попробуйте указать границы, в которых может находиться значение длины второй диагонали.

Ответ. Одна диагональ равна 2,8 (из заданных значений).
Возможные интервалы для значений длин второй диагонали: (5,5; 6) или (6,5; 7).

Решение. Ясно, что заданные значения для диагонали и сторон должны удовлетворять неравенствам треугольника. Эти неравенствам подойдет только значение для диагонали, равное 2,8, причем в одной полуплоскости от прямой ее содержащей будут лежать стороны с длинами 1 и 2, а в другой полуплоскости: стороны 5 и 7,5. (Другие значения для диагонали не подойдут, например, для 2 найдется только один треугольник со сторонами, предлагаемыми в условии: 1 и 2,8, для других всевозможных пар чисел не выполнится неравенство треугольника, и т.д.).

Рассмотрим, какие возможности существуют для второй диагонали. Таких возможностей две: 1) вместе с ней будут образовывать треугольник стороны 1 и 5, а также 2 и 7,5. Тогда в соответствии с неравенствами треугольника длина диагонали для первого треугольника лежит между 4 и 6, а для второго между 5,5 и 9,5. Пересечение этих интервалов и дает интервал (5,5; 6).

2) вместе со второй диагональю могут быть образованы треугольники со следующими парами сторон: 2 и 5, а также 1 и 7,5. Тогда в соответствии с неравенствами треугольника длина диагонали для первого треугольника лежит между 3 и 7, а для второго между 6,5 и 8,5. Пересечение этих интервалов дает интервал (6,5; 7).