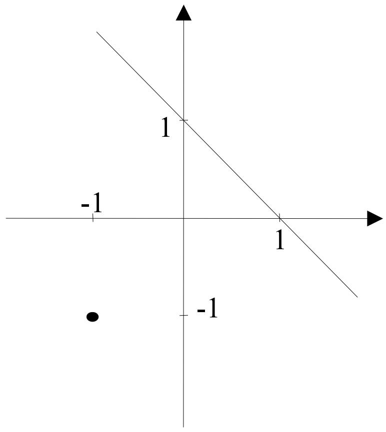
Решения задач 1-го (заочного) тура олимпиады ФПМИ-2019

для учащихся 9-10 классов (творческая олимпиада по математике)

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению $x^3+3xy+y^3=1$.



Ответ: см. на рис.

Решение: Проведем эквивалентные преобразования

$$x^3+3xy+y^3=1$$
$$(x+y)^3-3x^2y-3xy^2+3xy=1$$
$$(x+y)^3-1-3xy(x+y-1)=0$$
$$(x+y-1)\left((x+y)^2+(x+y)+1\right)-3xy(x+y-1)=0$$
$$(x+y-1)\left(x^2+2xy+y^2+x+y+1-3xy\right)=0$$
$$(x+y-1)\left(x^2+y^2-xy+x+y+1\right)=0$$
$$(x+y-1)\left(2x^2+2y^2-2xy+2x+2y+2\right)=0$$
$$(x+y-1)\left((x-y)^2+(x+1)^2+(y+1)^2\right)=0$$
$$x+y-1=0 \text{ или } x=-1,\, y=-1$$

2. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого $\frac{3}{10}<\{\sqrt{n}\}<\frac{1}{3}$. Здесь $\{\sqrt{n}\}$ – дробная часть числа $\sqrt{n}$.

Ответ: $n=11$.

Решение: Пусть $\sqrt{n}=k+\alpha,\ k\in N,\ \ \alpha\in\left(\frac{3}{10};\frac{1}{3}\right)$

$$k+\frac{3}{10}<\sqrt{n}<k+\frac{1}{3}$$

$$k^2+\frac{3}{5}k+\frac{9}{100}<n<k^2+\frac{2}{3}k+\frac{1}{9}$$

$$k=1: 1+\frac{3}{5}+\frac{9}{100}<n<1+\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\ n\in\varnothing;$$

$$k=2: 4+\frac{6}{5}+\frac{9}{100}<n<4+\frac{4}{3}+\frac{1}{9},$$

$$5+\frac{1}{5}+\frac{9}{100}<n<5+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\ n\in\varnothing;$$

$$k=3: 9+\frac{9}{5}+\frac{9}{100}<n<9+2+\frac{1}{9}\ n=11.$$

3. Три конькобежца, скорости которых в некотором порядке составляют геометрическую прогрессию, одновременно стартуют из одной точки по кругу. Через некоторое время второй конькобежец обгоняет первого, пробежав на 400 м больше него. Третий конькобежец пробегает то расстояние, которое пробежал первый к моменту его обгона вторым, за время, на 2/3 мин больше, чем первый. Найти скорость первого конькобежца.

Ответ: 600м/мин.

Решение: Заметим, что скорость третьего конькобежца самая маленькая, затем идет скорость первого и затем второго. Пусть vм/мин – скорость третьего конькобежца. Тогда скорость первого vq, а второго vq^2, где $q>1$ – знаменатель геометрической прогрессии. Пусть t – время, за которое второй конькобежец догоняет первого.

Тогда получим уравнения

$$\begin{cases} vqt = vq^2t - 400, \\ vqt = v\left(t+\frac{2}{3}\right), \end{cases}$$

откуда: $qt = t + \frac{2}{3}$,

$$t = \frac{2}{3(q-1)},$$

$$\frac{2vq}{3(q-1)} = \frac{2vq^2}{3(q-1)} - 400,$$

$$\frac{2vq(q-1)}{3(q-1)} = 400,$$

$$\frac{2}{3}vq = 400,$$

$$vq = 600.$$

4. Определите функцию $f(x)$, удовлетворяющую тождеству $f(x) + f\left(\frac{a^2}{a-x}\right) = x,\ a \neq 0$.

Ответ: $f(x) = \frac{x^3 - a^2x + a^3}{2x(x-a)}$.

Решение: Поставим в уравнение вместо x выражение $\frac{a^2}{(a-x)}$. Получим $f\left(\frac{a^2}{a-x}\right) + f\left(\frac{ax-a^2}{x}\right) = \frac{a^2}{a-x}$ (*). Повторим эту замену еще раз. Получим $f\left(\frac{ax-a^2}{x}\right) + f(x) = \frac{ax-a^2}{x}$. Умножив равенство (*) на -1 и прибавим к нему второе и исходное равенства, получим $f(x) = \frac{x^3 - a^2x + a^3}{2x(x-a)}$.

Примечание. Заметим, что полученная функция, также как и исходное тождество, не определена при x, равных a и 0.

5. Найдите наименьшее значение выражения $x+y$, если $\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}=2\sqrt{1+a}$.

Ответ: $2a$.

Решение: Воспользуемся неравенством $c^2+b^2\geq 2cb$ $2c^2+2b^2\geq(c+b)^2$.

Если $c=\sqrt{1+x}, b=\sqrt{1+y}$,

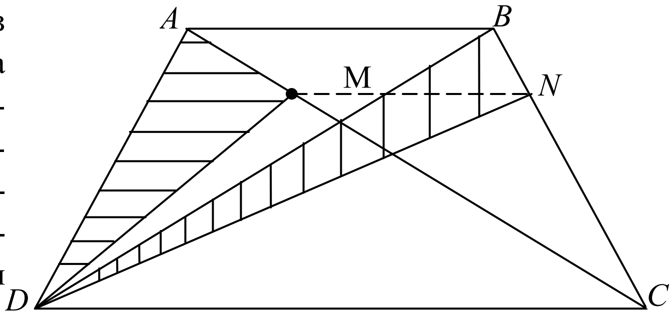
то $2(1+x+1+y)\geq\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}\right)^2=4+4a$

$4+2x+2y\geq 4+4a$

$x+y\geq 2a$.

Очевидно, граница достижима, если положить $x=y=a$.

6. В четырехугольнике $ABCD$ через точку M диагонали AC проведена прямая параллельная AB и пересекающая BC в точке N. Найти высоту треугольника DNC, если сторона $DC = a$, площадь треугольника DMC равна S и треугольники DAM и DBN равновелики.



Ответ: $h = \dfrac{2S}{a}$.

Решение: $MN \parallel AB \Rightarrow \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{BN}{NC}$. С другой стороны

$$\frac{S_{DAM}}{S_{DMC}} = \frac{AM}{MC}; \quad \frac{S_{DBN}}{S_{DNC}} = \frac{BN}{NC} \Rightarrow \frac{S_{DAM}}{S_{DMC}} = \frac{S_{DBN}}{S_{DNC}}.$$ Но $S_{DAM} = S_{DBN} \Rightarrow S_{DMC} = S_{DNC}$, т.е.

$MN \parallel DC \Rightarrow ABCD$ – трапеция. Тогда $h = \dfrac{2S}{a}$.