Решения задач второго тура олимпиады по математике и информатике
ФПМИ БГУ – 2019

11 класс

1. Ответ: $x_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{2}$.

Введем новую переменную, приняв за нее одно из стоящих в левой части слагаемых, например,

$$u = \sqrt{7 - \sqrt{44 + x^2 + 4x}} \geq 0 .$$

Тогда имеем:

$$u^2 = 7 - \sqrt{44 + x^2 + 4x},\ \sqrt{44 + x^2 + 4x} = 7 - u^2,\ \ 44 + x^2 + 4x = \left(7 - u^2\right)^2,$$

и, наконец, при $u^2 \leq 7$:

$$5 - x^2 - 4x = 5 + \left(44 - \left(7 - u^2\right)^2\right) = 5 + 44 - \left(49 - 14u^2 + u^4\right) = u^2\left(14 - u^2\right).$$

Поэтому исходное уравнение перепишется в виде

$$\sqrt{14 - 2\sqrt{u^2\left(14 - u^2\right)}} + u = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} .$$

Так как $u \geq 0$, то

$$\sqrt{14 - 2\sqrt{u^2\left(14 - u^2\right)}} = \sqrt{14 - 2u\sqrt{\left(14 - u^2\right)}} = \sqrt{14 - u^2 - 2u\sqrt{14 - u^2} + u^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{14 - u^2} - u\right)^2} = \left|\sqrt{14 - u^2} - u\right|.$$

Поскольку $u^2 \leq 7$, то $\sqrt{14 - u^2} \geq \sqrt{14 - 7} = \sqrt{7} \geq u$ и, значит, $\left|\sqrt{14 - u^2} - u\right| = \sqrt{14 - u^2} - u$. Тогда уравнение относительно переменной u примет вид

$$\sqrt{14 - u^2} - u + u = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$$

или

$$\sqrt{14 - u^2} = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} .$$

Отсюда

$$14 - u^2 = 7 + 4\sqrt{3};\ \ u^2 = 7 - 4\sqrt{3} = \left(2 - \sqrt{3}\right)^2;\ \ u = 2 - \sqrt{3} .$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$\sqrt{7 - \sqrt{44 + x^2 + 4x}} = 2 - \sqrt{3};\ \ 7 - \sqrt{44 + x^2 + 4x} = 7 - 4\sqrt{3};$$

$$\sqrt{44 + x^2 + 4x} = 4\sqrt{3};\ \ 44 + x^2 + 4x = 48;\ \ x^2 + 4x - 4 = 0;\ \ x = -2 \pm 2\sqrt{2}.$$

Замечание. Задачу можно решить короче с применением формулы сложных радикалов

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}},\ a \geq \sqrt{b},\ b > 0 .$$

2. Ответ: $x = 2$.

Используя тождество $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, преобразуем уравнение следующим образом

$$9^{\log_2 x} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - 3^{\log_2 x}; \ \left(3^{\log_2 x}\right)^2 = \left(x^2 - 1\right) \cdot 3^{\log_2 x}.$$

Отсюда после сокращения на $3^{\log_2 x} \neq 0$ получаем:

$$x^2 - 1 = 3^{\log_2 x}.$$

Последнее уравнение преобразуем, используя замену $t = \log_2 x$, т.е. $x = 2^t$:

$$3^t + 1 = 4^t$$

или, поделив обе части последнего уравнения на $4^t > 0$:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^t + \left(\frac{1}{4}\right)^t = 1.$$

Теперь левая часть получившегося уравнения является монотонной (монотонно убывающей) функций. Правая же его часть постоянна. Следовательно, такое уравнение имеет не более одного решения. Легко видеть, что корнем будет $t = 1$. Возвращаясь к исходной переменной, имеем:

$$\log_2 x = 1; \quad x = 2.$$

3. Ответ: 50.

Пусть x и y – количество красных и синих карандашей соответственно. Тогда после первого перекладывания в первой коробке стало $0.8x$ карандашей (20%, т.е. $0.2x$ карандашей из нее забрали), а во второй – $y + 0.2x$ карандашей. Пусть во второй раз из второй коробки переложили t синих карандашей. Тогда всего при втором перекладывании переложили в первую коробку $t + 4$ карандаша, в результате чего в ней оказалось $0.8x + t + 4$ карандаша, в то время как во второй – $y + 0.2x - t - 4$ карандаша. По условию $t + 4$ карандаша составляют 30% от содержимого второй коробки, откуда имеем первое уравнение:

$$t + 4 = 0.3(y + 0.2x).$$

С другой стороны, в итоге в первой коробке оказалось t синих карандашей, а во второй – $y - t$. Тогда из условия получаем второе уравнение:

$$y - t = t + 14.$$

Кроме того, количество синих карандашей – не более 32 (т.е. $y \le 32$), а общее количество карандашей в первой коробке увеличилось по сравнению с первоначальным не более чем на 4%, откуда получаем еще одно условие:

$$(0.8x + t + 4) - x \le 0.04x.$$

Объединяя все полученные соотношения, имеем систему:

$$\begin{cases} t + 4 = 0.3(y + 0.2x), \\ y - t = t + 14, \\ y \le 32, \\ 0.8x + t + 4 - x \le 0.04x. \end{cases}.$$

Выразив из второго уравнения системы t $\left(t=\frac{y}{2}-7\right)$ и подставив полученное выражение в первое уравнение системы, получим:

$$\frac{y}{2}-7+4=0.3(y+0.2x),$$

откуда

$$y=\frac{3x}{10}+15.$$

Тогда систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} y=\frac{3x}{10}+15, \\ \frac{3x}{10}+15\le 32, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3x}{10}+15\right)-7+4-0.2x\le 0.04x. \end{cases}.$$

Из неравенства находим: $50\le x\le 56$, а поскольку из уравнения следует, что x кратно 10 (так как y – целое), то $x=50$.

4. Ответ: $a\in\{1-\sqrt{2},\ 5+\sqrt{10}\}$.

Найдем наименьшее значение функции

$$f(x)=4x^2-4ax+\left(a^2-2a+2\right)$$

на отрезке $[0;2]$ как функцию параметра a. Так как графиком функции $y=f(x)$ является квадратичная парабола, ветви которой направлены вверх, а $x_в=\frac{a}{2}$ (абсцисса вершины), то $f(x)$ монотонно убывает при $x<x_в=\frac{a}{2}$ и монотонно возрастает при $x>x_в=\frac{a}{2}$.

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо рассмотреть три случая:

1) $x_в\le 0$, т.е. $a\le 0$. В этом случае на отрезке $[0;2]$ $f(x)$ монотонно возрастает. Следовательно,

$$\min_{0\le x\le 2} f(x)=f(0)=a^2-2a+2.$$

2) $x_в\in[0;2]$, т.е. $a\in[0;4]$. В этом случае $f(x)$ достигает своего наименьшего значения при $x=x_в$, т.е.

$$\min_{0\le x\le 2} f(x)=f\left(\frac{a}{2}\right)=2-2a.$$

3) $x_в\ge 2$, т.е. $a\ge 4$. В этом случае на отрезке $[0;2]$ $f(x)$ монотонно убывает и, следовательно,

$$\min_{0\le x\le 2} f(x)=f(2)=a^2-10a+18.$$

Таким образом,

$$\min_{0\le x\le 2} f(x)=\varphi(a)=\begin{cases} a^2-2a+2, \text{ если } a\le 0,\\ 2-2a, \text{ если } 0\le a\le 4,\\ a^2-10a+18, \text{ если } a\ge 4.\end{cases}$$

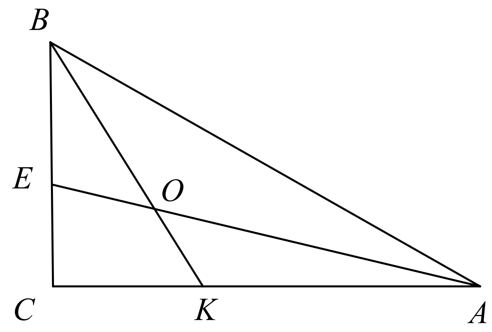
Решим теперь уравнение $\varphi(a)=3$. Учитывая вид функции $\varphi(a)$, вновь имеем три случая:

1) $\begin{cases} a^2-2a+2=3,\\ a\le 0,\end{cases}$ или $\begin{cases} a=1\pm\sqrt{2},\\ a\le 0,\end{cases}$ откуда $a=1-\sqrt{2}$;

2) $\begin{cases} 2-2a=3,\\ 0\le a\le 4,\end{cases}$ или $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2},\\ 0\le a\le 4.\end{cases}$ Последняя система не имеет решений.

3) $\begin{cases} a^2-10a+18=3,\\ a\ge 4,\end{cases}$ или $\begin{cases} a=5\pm\sqrt{10},\\ a\ge 4,\end{cases}$ откуда $a=5+\sqrt{10}$.

5. Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$.



Пусть $CK=a$, $\angle EAC=\alpha$, $\angle CBK=\beta$, $\angle AOK=\gamma$ (O – точка пересечения BK и AE). Тогда из прямоугольного треугольника BCK имеем:

$$BC=CK\operatorname{ctg}\angle CBK=a\operatorname{ctg}\beta=AK.$$

Следовательно,

$$AC=AK+CK=a(\operatorname{ctg}\beta+1).$$

Из прямоугольного треугольника ACE теперь выразим CE:

$$CE=AC\cdot\operatorname{tg}\angle EAC=a(\operatorname{ctg}\beta+1)\operatorname{tg}\alpha.$$

С другой стороны,

$$CE=BC-BE=BC-CK=a(\operatorname{ctg}\beta-1).$$

Следовательно, имеем уравнение

$$a\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta+1)=a(\operatorname{ctg}\beta-1)$$

или

$$\operatorname{ctg}\beta+1=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Отсюда

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta,$$

а поскольку

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta},$$

то

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=1, \text{ т.е. } \alpha+\beta=\frac{\pi}{4}.$$

Теперь остается заметить, что $\angle CKB$ – внешний угол треугольника AOK и поэтому $\angle CKB = \angle AOK + \angle EAC$, т.е. $\frac{\pi}{2} - \beta = \gamma + \alpha$, откуда $\gamma = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) = \frac{\pi}{4}$.

6. Будем считать, что слагаемые записаны в порядке невозрастания. Зафиксируем первое слагаемое, пусть это будет x. Обозначим через $K(x,a)$ количество разложений числа a на слагаемые, когда первым слагаемым является нечетное число x. Тогда

$$K(x,a) = K(x,a-x) + K(x-2,a-x) + \ldots + K(1,a).$$

Это означает, что вторым слагаемым может быть любое нечетное число, не превосходящее x. Легко видеть, что $K(1,a) = 1$ для любого натурального a. Для вычисления значений можно использовать таблицу размера $n \times n$.