Решения задач второго тура олимпиады по математике и информатике ФПМИ БГУ – 2019

9-10 классы

1. Рассмотрим все числа вида $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$, где n – натуральное число. Сколькими нулями могут заканчиваться такие числа?

Ответ: могут заканчиваться одним или двумя нулями, или не нулем.

Решение: При n от 1 до 4 имеем:

$n = 1 \quad 1 + 2 + 3 + 4 = 10,$

$n = 2 \quad 1 + 4 + 9 + 16 = 30,$

$n = 3 \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100,$

$n = 4 \quad 1 + 16 + 81 + 256 = 354.$

Т.е. возможны следующие случаи: нет нулей, 1 нуль, 2 нуля. Покажем, что 3-х и более нулей быть не может. Для этого покажем, что $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ не делится на 8. $n = 1, 2, 3, 4$ рассмотрены выше; при $n \geq 3$ сумма $2^n + 4^n$ на 8 делится; но
при $n = 2k \quad 1^n + 3^n = 1 + 9^k \equiv 2(\mathrm{mod}\ 8);$

при $n = 2k + 1 \quad 1^n + 3^n = (1 + 3)(1^{n-1} - 1^{n-2} \cdot 3 + 1^{n-3} \cdot 3^2 - \cdots + 3^{n-1}) = 4 \cdot m$, где m – нечетное.

2. Делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и самого числа. Натуральное число назовем восхитительным, если самый большой собственный делитель этого числа равен сумме собственного делителя, второго по величине, и собственного делителя, третьего по величине. (Например, восхитительное число 42. Самый большой делитель 21, следующие 14 и 7, 21=14+7). Найдите количество восхитительных чисел не превосходящих 2019.

Ответ: 133.

Решение: Заметим, что восхитительное число не может быть нечетным. Действительно, у нечетного число только нечетные делители, но сумма нечетных чисел – четная. Что противоречит определению восхитительного числа. Пусть N – восхитительное число. Тогда 2 – его минимальный собственный делитель. Пусть a, b – следующие по величине делители. Тогда верно равенство $\frac{N}{2} = \frac{N}{a} + \frac{N}{b}$. Легко убедиться, что возможны только $a = 3 \ b = 6$, ибо если $a \geq 4 \ \ \frac{N}{a} + \frac{N}{b} \leq \frac{N}{4} + \frac{N}{5} < \frac{N}{2}$. Это означает, что N делится на 6, но не делится на 4 и на 5. Тогда при делении на 60 число N дает в остатке 6, 18, 42, 54. Поэтому среди каждых 60 последовательных чисел ровно 4 восхитительных. Заметим, что само число 6 не подходит. Так как имеем $2019: 60 = 33$ (39 ост), то всего $4 \cdot 33 + 1 = 133$ восхитительных числа.

3. Найдите все такие функции $f: N \to Z$, что $f(a)+f(b)+f(c)$ делится на $a+b+c$ для любых натуральных a, b, c.

Ответ: $f(x)=kx$.

Решение: Подставив тройку $(1, b+1, c)$ в выражение $f(a)+f(b)+f(c)$, получим, что $f(1)+f(b+1)+f(c)$ делится на $b+c+2$; а подставив тройку $(2, b, c)$, получим, что $f(1)+f(b)+f(c)$ делится $b+c+2$.

Тогда $f(1)+f(b+1)+f(c)-f(2)-f(b)-f(c)$ делится на $b+c+2$.

Т.е. $f(b+1)-f(b)-f(2)+f(1)$ делится на $b+c+2$ при любом натуральном c.

Значит $f(b+1)-f(b)-f(2)+f(1)=0$.

$f(b+1)-f(b)=f(2)-f(1)=k$. Тогда для любого натурального b и произвольного постоянного k, $k \in Z$.

Значит $f(x)=kx+d$, $k-\text{const}$ $k \in Z$.

Подставим теперь (a,b,c).

$ka+d+kb+d+kc+d$ делится $a+b+c$ при любых $(a,b,c) \Rightarrow d=0$. Отсюда $f(x)=k\cdot x$, $k \in Z$.

4. Положительные числа x, y, z таковы, что $x+y+z=3$. Докажите, что $\frac{x}{x^3+y^2+z}+\frac{y}{y^3+z^2+x}+\frac{z}{z^3+x^2+y} \le 1$.

Доказательство: Имеем $\frac{x}{x^3+y^2+z}=\frac{x\left(\frac{1}{x}+1+z\right)}{\left(x^3+y^2+z\right)\left(\frac{1}{x}+1+z\right)} \le$ [Н.Коши-Буняковского в знаменателе] $\le \frac{1+x+xz}{\left(x^{3/2}\frac{1}{\sqrt{x}}+y\cdot 1+z\right)^2}=\frac{1+x+xz}{(x+y+z)^2}=\frac{1+x+xz}{9}$.

Сложим подобные оценки для всех трех слагаемых исходной суммы:

$$\frac{3+x+y+z+xz+yx+zy}{9}=\frac{1}{3}+\frac{x+y+z}{9}+\frac{xz+yz+zy}{9} \le \frac{2}{3}+\frac{(x+y+z)^2}{27}=1.$$

[Примечание. $3(xz+yx+zy) \le (x+y+z)^2$ – прямое следствие неравенства $x^2+y^2+z^2 \ge xy+xz+zy$]

5. Каких треугольников с целочисленными сторонами больше: с периметром 2019 или с периметром 2022?

Ответ: поровну.

Решение: Пусть есть треугольник со сторонами a, b, c такой, что $a \le b \le c$ и $a+b+c=2019$. Тогда рассмотрим треугольник со сторонами $a+1$, $b+1$, $c+1$.

Очевидно, что $a+b+2>c+1$. Значит, треугольник существует. Отсюда следует, что треугольников с периметром 2022 не меньше, чем треугольников с периметром 2019.

Теперь возьмем треугольник со сторонами a, b, c такой, что $a \le b \le c$ и $a+b+c=2022$. И построим треугольник со сторонами $a-1$, $b-1$, $c-1$. Заметим, что $a \ne 1$. Действительно, если $a=1$, то $b+c=2021$, причем b и c целые, то есть нарушается неравенство треугольника. Покажем, что $a+b-2>c-1$. Пусть неравенство нарушилось. Тогда $a+b \le c+1$. Но $a+b>c$, a и b – целые. Значит $a+b=c+1$. Тогда получаем

$$a+b+c=2020,$$
$$a+b-c=1,$$
$$2(a+b)=2021 \text{ – противоречие.}$$

Т.е. треугольник со сторонами $a-1$, $b-1$, $c-1$ существует. Значит треугольников с периметром 2019 не меньше чем с периметром 2020.

6. Площадь прямоугольного треугольника равна S. Найдите площадь треугольника с вершинами в основании перпендикуляров, проведенных из точки пересечения медиан данного треугольника к его сторонам.

Ответ: $\dfrac{2S}{9}$.

Решение: Пусть $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $\angle A=\alpha$, $BK=h$, (где BK – высота).

$$MB_1=\frac{1}{3}h$$

$$MC_1=\frac{1}{3}a$$

$$MA_1=\frac{1}{3}c$$

$$S_{A_1B_1C_1}=S_{MC_1A_1}+S_{MA_1B_1}+S_{MB_1C_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{3}\cdot\frac{c}{3}+\frac{c}{3}\cdot\frac{h}{3}\sin\left(90^\circ+\alpha\right)+\frac{a}{3}\cdot\frac{h}{3}\sin\left(180^\circ-\alpha\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{ac}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{9}\left(c\cdot\cos\alpha+a\cdot\sin\alpha\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{ac}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{9}\left(AK+CK\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{ac}{2}+\frac{bh}{2}\right)=\frac{2S}{9}.$$