

# XXVIII ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

для учащихся старших классов

## Условия задач первого тура олимпиады по математике и информатике

### Задачи для учащихся 11 классов («Абитуриент БГУ – 2019»)

1. На базе имеется несколько автомашин разной грузоподъемности. Для перевозки груза каждая автомашинка сделала одно и то же число рейсов, а затем 7 машин сделали еще по 12 рейсов каждая. Если бы каждая машина сделала бы на 6 рейсов больше, то для перевозки в 2 раза меньшего груза потребовалось бы на 7 машин меньше. Сколько машин было на базе?

2. Решить систему уравнений 
$$\begin{cases} x^3 - xyz = 1, \\ y^3 - xyz = 2, \\ z^3 - xyz = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

3. В углы  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  вписаны окружности радиусов 2 и 3 соответственно, касающиеся биссектрисы угла  $A$ . Найти длину этой биссектрисы, если расстояние между точками, в которых окружности касаются стороны  $BC$ , равно 7.

4. Найдите значение выражения  $\frac{1-4\sin 10^\circ}{\operatorname{tg} 20^\circ} - \operatorname{tg} 40^\circ$ .

5. Верно ли, что во множестве корней уравнения  $x^2 - 8[x] + 7 = 0$  (где  $[x]$  – целая часть числа  $x$ ) найдутся два на расстоянии, меньшем 1 друг от друга.

6. Имеется  $2n$  целых чисел, величина каждого из которых по модулю не превышает  $10^{10}$ . Предложите алгоритм (дайте словесное или другое описание с обоснованием), с помощью которого можно определить, разбиваются ли эти числа на пары таким образом, чтобы произведение чисел в парах было одинаковым.

### **Задачи для учащихся 9-10 классов (творческая олимпиада по математике)**

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению  $x^3 + 3xy + y^3 = 1$ .

2. Найдите наименьшее натуральное число  $n$ , для которого

$$\frac{3}{10} < \{\sqrt{n}\} < \frac{1}{3}.$$

Здесь  $\{\sqrt{n}\}$  - дробная часть числа  $\sqrt{n}$ .

3. Три конькобежца, скорости которых в некотором порядке составляют геометрическую прогрессию, одновременно стартуют из одной точки по кругу. Через некоторое время второй конькобежец обгоняет первого, пробежав на 400 м больше него. Третий конькобежец пробегает то расстояние, которое пробежал первый к моменту его обгона вторым, за время, на  $\frac{2}{3}$  мин больше, чем первый. Найти скорость первого конькобежца.

4. Определите функцию  $f(x)$ , удовлетворяющую тождеству

$$f(x) + f\left(\frac{a^2}{a-x}\right) = x, \quad a \neq 0.$$

5. Найдите наименьшее значение выражения  $x+y$ , если  $\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} = 2\sqrt{1+a}$ .

6. В четырехугольнике  $ABCD$  через точку  $M$  диагонали  $AC$  проведена прямая параллельная  $AB$  и пересекающая  $BC$  в точке  $N$ . Найти высоту треугольника  $DNC$ , если сторона  $DC = a$ , площадь треугольника  $DMC$  равна  $S$  и треугольники  $DAM$  и  $DBN$  равновелики.

### **Задачи для учащихся 7-8 классов (подготовительная олимпиада по математике)**

1. Игорь выбрал пять чисел из множества  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Если бы он сказал Юре произведение выбранных чисел, то этого было бы недостаточно чтобы выяснить вопрос о чётности суммы выбранных чисел. Каково произведение выбранных чисел?

2. Безумный таракан возомнил себя математиком. Введя координатную плоскость на листе клетчатой бумаги, так что координаты узлов сетки – точки с целочисленными значениями  $(x, y)$ , начал путешествовать по линиям сетки по спирали, последовательно останавливаясь в узлах сетки, следующим образом: начав с центра листа – точки с координатами  $(0,0)$ , он первые пять остановок

