XXVI ОЛИМПИАДА ФПМИ **второй (заключительный) тур** (27.04.2019 г.)

Условия задач

ВНИМАНИЕ.

1. Пользоваться калькулятором не разрешается.
2. Завтра – 28 апреля 2018 г. в 10.10 в ауд. 521 главного корпуса БГУ состоится разбор решений задач заключительного тура олимпиады ФПМИ, после которого можно будет посмотреть свои работы.
3. Закрытие олимпиады сразу после завершения разбора решений и просмотра работ в той же аудитории.

7-8 классы

1. В результате эксперимента впробирке размножаются бактерии. За сутки каждая бактерия делится пополам, и вместо одной бактерии появляются две, равные по величине исходной. Ещё через сутки каждая из имеющихся в пробирке бактерий снова делится пополам и так далее. Через 100 суток пробирка полностью заполнилась бактериями. Через какое время от начала эксперимента бактерии заполнили ровно 12,5% объема пробирки?
2. Незнайка записал 2019-значное число, не содержащее нулей. Потом переставил каким-то образом цифры и сложил с первоначальным числом. В итоге получилось число, состоящее только из единиц. Ошибся ли Незнайка?
3. Дан четырехугольник *ABCD,* у которого *BC*= 26 и *AD*= 62. Также известно, что сторона *BC* параллельна *AD*. Можно ли данный четырехугольник разрезать на равные треугольники?
4. Дан набор из чисел 1, 2, 3, 4, 5. На каждом ходу из имеющегося набора можно выбрать два числа a и b и заменить их на числа $3a+2b$ и$a-4b$. Можно ли после нескольких ходов получить набор чисел 2019, 2020, 2021, 2022, 2023?
5. Земельный участок представляет собой квадрат со стороной 1 км, который разбит на маленькие участки-квадраты со стороной 100 м. Известно, что в левом верхнем квадрате со стороной 500 м растет лес, а на остальной части всего участка – трава. Несколько дачников хотят разделить весь участок между собой так, чтобы во владении каждого из них был связный участок, в котором площадь, занятая лесом, была в три раза меньше, чем площадь, занятая травой. На какое наибольшее количество дачников можно разделить участок указанным образом? (Участки дачников не обязаны быть равными или даже равновеликими, делить можно только по границам маленьких квадратиков со стороной 100 м, *связность участков дачников означает, что из любого маленького квадратика участка можно перейти в любой другой квадратик этого же участка, оставаясь внутри него, и переходя из квадратика в квадратик через их общую сторону.*)
6. Упросить выражение (ответ является целым или рациональным числом и не содержит знаков сложения и умножения)
$$\frac{3^2+1}{3^2-1}+\frac{5^2+1}{5^2-1}+\frac{7^2+1}{7^2-1}+\cdots+\frac{2019^2+1}{2019^2-1}.$$
7. В городе 200 станций метро, некоторые из которых соединены между собой туннелями. Известно, что от любой станции можно доехать до любой другой (возможно, с пересадками). Получится ли у туриста побывать на каждой станции, совершив не более а) 398 переездов? б) 396 переездов?

9-10 классы

ВНИМАНИЕ.

1. Пользоваться калькулятором не разрешается.
2. Завтра – 28 апреля 2019 г. в 9.00 в ауд. 513 главного корпуса БГУ состоится разбор решений задач заключительного тура олимпиады ФПМИ, после которого можно будет посмотреть свои работы.
3. Закрытие олимпиады сразу после завершения разбора решений и просмотра работ в той же аудитории.

Условия задач

1. Рассмотрим все числа вида $1^n+2^n+3^n+4^n$, где n – натуральное число. Сколькими нулями могут заканчиваться такие числа?

2. Делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и самого числа. Натуральное число назовем восхитительным, если самый большой собственный делитель этого числа равен сумме собственного делителя, второго по величине, и собственного делителя, третьего по величине. (Например, восхитительное число 42. Самый большой делитель 21, следующие 14 и 7, 21=14+7). Найдите количество восхитительных чисел не превосходящих 2019.

3. Найдите все такие функции $f:N\to Z$, что $f(a)+f(b)+f(c)$ делится на $a+b+c$ для любых натуральных a, b, c.

4. Положительные числа x, y, z таковы, что $x+y+z=3$. Докажите, что

$$\frac{x}{x^3+y^2+z}+\frac{y}{y^3+z^2+x}+\frac{z}{z^3+x^2+y}\le 1.$$

5. Каких треугольников с целочисленными сторонами больше: с периметром 2019 или с периметром 2022?

6. Площадь прямоугольного треугольника равна S. Найти площадь треугольника с вершинами в основании перпендикуляров, проведенных из точки пересечения медиан данного треугольника к его сторонам.

Олимпиада «Абитуриент-БГУ-2019» по математике и информатике

II тур, 27 апреля 2019 года (заключительный)

11 класс

1. Решить уравнение $\sqrt{14-2\sqrt{5-x^2-4x}}+\sqrt{7-\sqrt{44+x^2+4x}}=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.
2. Решить уравнение $x^{\log_2 9}=x^2\cdot 3^{\log_2 x}-x^{\log_2 3}$.
3. В двух коробках лежат карандаши: в первой красные, во второй – синие, причем количество синих карандашей не более 32. 20% карандашей из первой коробки переложили во вторую. Затем 30% карандашей, оказавшихся во второй коробке, переложили в первую, причем среди них было ровно 4 красных. После этого синих карандашей во второй коробке оказалось на 14 больше, чем в первой, а общее число карандашей в первой коробке по сравнению с первоначальным увеличилось, но не более чем на 4%. Найти общее количество красных карандашей.
4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение квадратного трехчлена $4x^2-4ax+a^2-2a+2$ на отрезке $0\le x\le 2$ равно 3.
5. На катете AC прямоугольного треугольника ABC отложен отрезок $AK=BC$, а на катете BC – отрезок $BE=CK$. Найти угол между прямыми BK и AE.
6. Задано натуральное число n, не превосходящее 100. Требуется найти количество различных разложений числа на нечетные слагаемые. При $n=4$ таких разложений 2: $1+3$ и $1+1+1+1$.