Решения задач второго тура олимпиады по математике и информатике
ФПМИ БГУ – 2020

11 класс

1. Ответ: $x_1=0;\ \ x_2=\sqrt[3]{2}$.

Перепишем уравнение в виде

$$x^6=2\left(\left[x+\frac{1}{2}\right]+[x]\right).$$

Поскольку левая часть уравнения неотрицательна, а для $x<0$ $\left[x+\frac{1}{2}\right]\le 0$ и $[x]<0$, то при отрицательных значениях x решений нет.

Рассмотрим далее для $x\ge 0$ следующие случаи:

а) $0\le x<\frac{1}{2}$. При таких ограничениях $\left[x+\frac{1}{2}\right]=0$ и $[x]=0$. Поэтому уравнение принимает вид $x^6=0$, откуда получается решение $x=0$.

б) $\frac{1}{2}\le x<1$. В этом случае $\left[x+\frac{1}{2}\right]=1$ и $[x]=0$. Тогда имеем уравнение $x^6=2$ с единственным положительным корнем $x=\sqrt[6]{2}$. Но $\sqrt[6]{2}>1$, следовательно, на этом промежутке решений нет.

в) $1\le x<\frac{3}{2}$. При таких ограничениях $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x]=1$. Получаем уравнение $x^6=4$ с единственным положительным корнем $x=\sqrt[3]{2}$. Очевидно, $\sqrt[3]{2}>1$. С другой стороны, $\sqrt[3]{2}<\frac{3}{2}$, так как $\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}>2$. Итак, $x=\sqrt[3]{2}$ – решение данного уравнения.

г) $x\ge\frac{3}{2}$. В этом случае выполняются следующие соотношения:

$$x^6=x^5\cdot x\ge\left(\frac{3}{2}\right)^5 x=7\frac{19}{32}x>4x+1=2\cdot\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)+x\right)\ge 2\cdot\left(\left[x+\frac{1}{2}\right]+[x]\right),$$

(здесь мы учитываем, что из определения целой части следует неравенство $[a]\le a$). Поэтому при $x\ge\frac{3}{2}$ уравнение корней не имеет.

2. Ответ: $\left[3\sqrt{2};6\right]$.

Обозначая $g(x)=\cos(2f(x))$ и понижая степень косинуса в первой дроби, приходим к уравнению

$$\frac{1}{g(x)}-6g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{x}.$$

После замены x на $\frac{1}{x}$ имеем:

$$\frac{1}{g\left(\frac{1}{x}\right)}-6g(x)=5x.$$

Исключая из последних двух уравнений $g\left(\frac{1}{x}\right)$, получим уравнение относительно $y=g(x)$:

$$6y^2+5xy-x^2=0,$$

Откуда либо $y=-x$, либо $y=\frac{x}{6}$.

Это значит, что функция $g(x)$ в любой точке x своего множества определения может принимать только одно из этих двух значений.

По условию задачи $\frac{1}{6}\le x\le 6,\ 0\le f(x)\le\frac{\pi}{4}$, следовательно, равенство

$$\cos(2f(x))=-x$$

не выполняется, так как его левая и правая части имеют разные знаки.

В то же время уравнение

$$\cos(2f(x))=\frac{x}{6}$$

решение имеет, причем в силу ограничений на область значений $f(x)$ оно единственно:

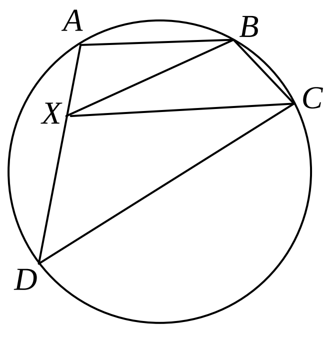
$$f(x)=\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{6}.$$

Тогда

$$\begin{cases} f(x)\frac{\pi}{8}, \\ \frac{1}{6}\le x\le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arccos\frac{x}{6}\le\frac{\pi}{4}, \\ \frac{1}{6}\le x\le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\le\frac{x}{6}\le 1, \\ \frac{1}{6}\le x\le 6 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[3\sqrt{2};6\right].$$

3. Ответ: 3.

Имеем очевидные равенства (углы при параллельных прямых и секущей):



$$\angle ABX=\angle BXC=\angle XCD$$

и

$$\angle AXB=\angle XDC.$$

Кроме того, из треугольника ABX следует равенство

$$\angle XAB+\angle AXB+\angle ABX=\pi,$$

а из того, что четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, соответственно равенство

$$\angle XAB+\angle BCX+\angle XCD=\pi.$$

Отсюда, учитывая записанные выше равенства углов при параллельных прямых, получаем, что

$$\angle BCX=\angle AXB=\angle XDC.$$

Таким образом, все три треугольника ($AXB,\ XDC$ и BCX) подобны друг другу. Из подобия треугольников AXB и XDC найдем коэффициент их подобия:

$$k = \frac{XD}{AX} = \frac{6}{\frac{3}{2}} = 4 .$$

Поэтому, если $AB = x,\ BX = y$, то $CX = 4x,\ CD = 4y$. Теперь, используя подобие треугольников AXB и BCX , можем записать:

$$\frac{BC}{AX} = \frac{BX}{AB} = \frac{CX}{BX} . \qquad (*)$$

Из последнего равенства получаем

$$BX^2 = AB \cdot CX$$

или

$$y^2 = x \cdot 4x = 4x^2 .$$

Следовательно, $y = 2x$, и первое из равенств (*) дает:

$$BC = AX \cdot \frac{BX}{AB} = \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{x} = 3 .$$

4. Для определения уравнения прямой, которая делит фигуры на равновеликие части достаточно определить координаты точек, через которые она проходит. В качестве первой точки можно выбрать центр квадрата, так как любая прямая, проходящая через эту точку, делит квадрат на равновеликие части. Координаты этой точки равны среднему арифметическому координат вершин квадрата. В качестве второй точки вначале выберем точку пересечения медиан треугольника. Координаты этой точки равны среднему арифметическому координат вершин треугольника. Проведем прямую через эти точки. Если она делит треугольник на равновеликие части (проходит через одну из вершин треугольника), то прямая найдена.

   Пусть построенная прямая не делит треугольник на равновеликие части. Тогда выберем одну из вершин треугольника, которая принадлежит части с большей площадью, пусть это вершина A. В качестве вершины B будем рассматривать точку пересечения медиан. Понятно, что вторая искомая точка будет лежать на этом отрезке между точками A и B. Поиск этой точки можно осуществить различными способами, например половинным делением отрезка (метод дихотомии), и определении нового (более короткого) интервала, на котором лежит точка.

5. Ответ: ЛЮБЛЮ ИСПОЛЬЗОВАТЬ СТЕПЕНИ ДВОЙКИ В КРИПТОГРАФИИ.

   Поскольку НОД(a, 32) = 4 > 1, то преобразование $y = (ax + b) \bmod 33$ не является взаимно однозначным. Более того, при зашифровании четыре разные буквы переходят в одну. Так "А" (номер 0), "И" (номер 8) "Р" (номер 16) и "Ш" (номер 24) переходя в букву "И" (номер 8); буквы "Б", "Й", "С" и "Щ" – в "М" и т.д. Поэтому по полученному ширфтексту математически однозначно нельзя определить, какое сообщение было изначально. Поскольку известно, что изначально было осмысленное выражение, то восстановить его можно с помощью бесключевого чтения, т.е. перебором, подбирая буквы так, чтобы выстраивалась осмысленная последовательность русских слов. От учащихся мы ожидаем, что они должны описать, как они этот перебор будут проводить.

6. Ответ: 3) m и k такие, что все делители числа НОД(m, k), большие 1, больше 33. По другому это можно записать: НОД(НОК(1, 2, ..., 33), НОД(m, k)) = 1.

Решение. Рассмотрим сообщение A состоящее их всех символов алфавита, записанных по одному разу. Тогда $E(A)$ (результат зашифрования сообщения A) также состоит из всех символов алфавита, иначе получим противоречие с тем, что разные символы при зашифровании переходят в разные символы. Это же утверждение верно и для S_k (для любого k).

1) Заметим, что $S_3(A) = E(S_2(A))$, откуда однозначно восстанавливается E. Действительно, для каждого символа алфавита, записанного в сообщении $S_2(A)$, мы можем сказать в какой символ он переходит при зашифровании – в соответствующий символ в сообщении $S_3(A)$.

2) Пусть НОД$(m, k) = 1$, тогда известно, что существуют такие натуральные числа a и b, что $am - bk = 1$ или $am = bk + 1$, откуда $S_m^{(a)}(A) = E(S_k^{(b)}(A))$ (в записи $S_m^{(a)}(A)$ верхний индекс "(a)" означает, что устройство S_m применялось m раз), откуда однозначно восстанавливается E как в пункте 1.

3) Заметим, что при любой таблице замены в шифре простой замены при повторном зашифровании любого символа рано или поздно происходит зацикливание, т.е. символ переходит сам в себя. Длина такого цикла может варьироваться от 1, когда символ при одинарном зашифровании переходит в себя, до 33, например, при шифре, в котором "А" переходи в "Б", "Б" – в "В" и т.д. "Я" – в "А" . При этом легко убедиться, что любое промежуточное значение длины цикла достижимо. Значит, если в алфавите m символов, то гарантированно за t_m = НОК(1, 2, 3, ..., m) повторов операций зашифрования любой символ перейдет сам в себя. Т.е. другими словами $E^{(t_m)}(A) = A$.

Пусть НОД(t_m, НОД$(m, k)) = 1$, тогда существует такое натуральное число n, что $nt_m + 1$ делится на НОД(m, k). Рассмотрим диофантово уравнение $xm - yk = nt_m + 1$ относительно x и y. Оно разрешимо в целых числах тогда и только тогда, когда правая часть $nt_m + 1$ делится на НОД коэффициентов слева, т.е. на НОД(m, k), а это у нас выполнено. Данное уравнение имеет решение $(x, y) = (a, b)$ в натуральных числах. Для его нахождения берем любое целочисленное решение $(x, y) = (a_0, b_0)$ и увеличиваем x на k, а y – на m, до тех пор, пока оба числа не станут положительными. Итак, натуральные числа a и b таковы, что $am - bk = nt_m + 1$, тогда $S_m^{(a)}(A) =$ $= E(S_k^{(b)}(\mathrm{E}^{(nt_m)}(A))) = E(S_k^{(b)}(A))$, откуда однозначно восстанавливается E как в пункте 1.

Покажем, что для остальных пар чисел (m, k) гарантированно восстановить таблицу замены шифра E невозможно. Если d является делителем числа m, то с помощью устройства S_m мы не можем различить 2 ситуации: а) когда у нас есть d циклов длины 1; б) когда у нас один цикл длины d. Поэтому, если у нас есть 2 устройства, такие, что у НОД(m, k) есть делитель d меньший 34, то ни с помощью S_m, ни с помощью S_k мы не отличим две описанные ситуации, а значит, однозначно восстановить E не сможем. Заметим, что если НОД(t_m, НОД$(m, k)) > 1$, то НОД(m, k) обязательно делится на одно из чисел от 1 до 33.