

Заключительный тур

23 мая 2020

9 – 10 классы

- *Время выполнения задания 4 часа: 11.00 – 15.00.*
- *Решение каждой задачи оформлять на отдельных листах, подписать, сканировать или сфотографировать и переслать на электронный адрес Ps.Nz.ofpmi@gmail.com, где **P** означает класс, в котором Вы учитесь, **N** – номер задачи в задании. В теме письма указать ФИО и школу.*
- *Жюри настоятельно рекомендует **оформлять задачи подробно и разборчиво**, а размер чертежей и рисунков делать достаточным для понимания. Помните, что непонятные или спорные(!) моменты (т.е. такие, в которых нет однозначного логичного обоснования) могут быть истолкованы не в пользу учащегося.*
- **ВНИМАТЕЛЬНО** *вчитывайтесь в условия задач – в случае сомнений и даже кажущихся двусмысленности или недостаточности условий сами находите разумное понимание или подход к задаче. Помните, что порядок проведения олимпиады таков, что жюри не может ответить на Ваши вопросы или сделать какие-то уточнения – и в этом все участники олимпиады находятся в равных условиях!*

Условия задач

1. Перестановкой длины n назовем упорядоченный набор чисел $[1, 2, \dots, n]$. Все перестановки длины 3: $[1, 2, 3]$, $[1, 3, 2]$, $[2, 1, 3]$, $[2, 3, 1]$, $[3, 1, 2]$, $[3, 2, 1]$. Транспозицией называется операция, меняющая местами два элемента перестановки. Например, применив одну транспозицию к перестановке $[1, 2, 3]$ можно получить перестановки $[2, 1, 3]$, $[1, 3, 2]$, $[3, 2, 1]$ и только их. Какое наибольшее количество различных перестановок длины $n > 1$ можно выбрать, чтобы для любых двух выбранных перестановок нельзя было получить одну из другой одной операцией транспозиции?

2. При каких целых значениях параметра a уравнение

$$\left[x^2 \right] + a = 2020x$$

имеет нечетное число корней? Может ли это уравнение иметь единственный корень?

3. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - x + 1$. Существуют ли три различных натуральных числа k, l, m такие, что $f(k) \cdot f(l)$ делится на kl , $f(k) \cdot f(m)$ делится на km , $f(m) \cdot f(l)$ делится на ml ?

4. На сторонах BC , AD , AB ромба $ABCD$ соответственно выбраны точки K , L , M так что $DK=DL$, $\angle BMD = \angle KDM$. Докажите, что прямые DM , KL и AC пересекаются в одной точке.
5. Зашифрование с помощью аффинного шифра происходит следующим образом:
 1) каждая буква сообщения заменяется на номер этой буквы в алфавите (нумерация начинается с нуля, см. таблицу внизу); 2) каждый номер буквы x заменяется на новый номер $y = (ax + b) \bmod 33$, где пара натуральных чисел (a, b) – это ключ шифрования, запись "mod 33" означает нахождение остатка при делении на 33; 3) новые номера заменяются на соответствующие буквы алфавита, а получившаяся последовательность букв, является результатом зашифрования. Перед зашифрованием из сообщения удаляют все знаки препинания и пробелы.

Незнайка зашифровал некоторое осмысленное выражение:

ЁАИСЭ ЁЭФЧЪ ЧЁЛЭГ СИФОЛ ЫИФЧА ААОГГ ЧССФЁ СЧГФЭ Ё

С помощью математических вычислений Знайка не смог расшифровать сообщение, несмотря на то, что он знал ключ $(a, b) = (12, 15)$. Объясните, как такое могло произойти, и восстановите сообщение Незнайки.

Примечания: пробелы в зашифрованном сообщении вставлены для удобства прочтения; необходимо подробно описать, как вы восстанавливаете сообщение, правильный ответ без описания оцениваться не будет.

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	

6. Шифр простой замены представляет собой алгоритм побуквенного зашифрования текста с использованием таблицы замены. Каждая буква открытого (исходного) текста заменяется соответствующей буквой из таблицы. При этом одинаковые буквы заменяются одинаковыми, разные – разными.

При исследовании планеты Криптон выяснилось, что для любого сообщения X (набора символов из алфавита A планеты Криптон) и любого шифра простой замены $E: A \rightarrow A$ верно следующее утверждение: если Y – результат зашифрования сообщения X с помощью шифра E , т.е. $Y = E(X)$, то зашифровав Y с помощью E еще 24 504 479 раз, обязательно получается X . Сколько символов может быть в алфавите планеты Криптон? Найдите все возможные варианты.