

5-6 класс

1. Время выполнения работы 3,5 часа (210 мин.).
2. Пользоваться калькулятором не разрешается.
3. Обращаем Ваше внимание, что итоги олимпиады подводятся как в целом по направлению (Математика-информатика), так и в номинации «Криптография». Основными критериями при подведении итогов по криптографии являются правильность решения задачи № 6 и достаточно успешное выполнение остальных заданий (степень успешности выполнения будет определяться решением жюри).
4. Завтра – 16 мая 2021 г. в 9.00 в ауд. 605 главного корпуса БГУ состоится разбор решений задач заключительного тура олимпиады ФПМИ, после которого можно будет посмотреть свои работы.
5. Закрытие олимпиады сразу после завершения разбора решений, просмотра работ и печати дипломов в той же аудитории 605 главного корпуса (предположительно не позднее 13.00).

1. Шестизначное число $\overline{*7*8*9}$ делится на 7, 11 и 13. Восстановите в числе $\overline{*7*8*9}$ неизвестные цифры. Ответ объясните.

2. Выхав в детский лагерь «Бригантина» и проехав половину пути, автобус увеличил скорость на $\frac{1}{4}$ и поэтому прибыл в лагерь на полчаса раньше запланированного времени. Сколько времени в итоге понадобилось автобусу на весь путь?

3. а) Квадрат какого размера можно составить из фигурок на рисунке внизу?

б) Попробуйте указать все возможные размеры квадратов, которые можно составить из указанных фигурок? (Фигурки можно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга).



4. Тридцать учеников, пришедших на олимпиаду ФПМИ, расселись за парты в классе по 5 человек в каждый горизонтальный ряд (в каждом горизонтальном ряду по 5 парт и всего 6 таких рядов, т.е. класс 5×6). После этого из каждого из 6 горизонтальных рядов был выбран самый низкий ученик и из всех этих 6 учеников выбрали самого высокого. Им оказался ученик Миша. Из каждого из 5 вертикальных рядов был выбран самый высокий ученик, а затем из всех этих 5 учеников выбрали самого низкого. Им оказался ученик Егор. Кто выше: Миша или Егор? (Выбранные низкие ученики никуда не уходят и участвуют в дальнейшем выборе высоких учеников, и наоборот.)

5. Знайка придумал новый шифр. Он записал все буквы русского алфавита АБВГДЕЁЖЗИЙКЛМНОПРСТУФХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ по кругу по часовой стрелке. При шифровании каждая гласная буква заменяется ближайшей гласной при обходе круга по часовой стрелке (например, «Э» → «Ю», «Я» → «А»), а каждая согласная буква – ближайшей согласной при обходе круга против часовой стрелки (например, «В» → «Б», «Б» → «Щ»), буквы «Ь» и «Ъ» не являются ни гласными, ни согласными и остаются без изменений. Помогите Знайке расшифровать полученное от Незнайки сообщение:

ЩЭБЕЯ ОМУВГЕ Б ЩОЩКОУСЁЙЁ, ЩЫЩКОЙЫ А ФУЦЫ НЁПЁГЕСЬ КЫММЫЯ ЯКЫ.

6. В клетках квадрата 3×3 записаны нули. За один ход можно выбрать две соседние по стороне клетки и прибавить к двум числам, записанным в этих клетках, или отнять от них одно и то же натуральное число. Можно ли в результате получить квадрат вида:

а)

2	5	6
5	5	6
4	4	3

б)

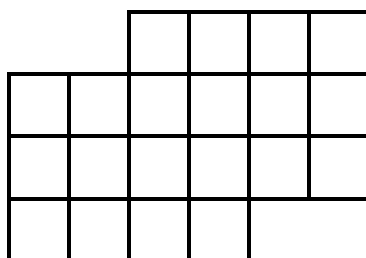
10	10	10
10	10	10
10	10	10

Желаем успеха !

7-8 класс

1. Время выполнения работы 3,5 часа (210 мин.).
2. Пользоваться калькулятором не разрешается.
3. Обращаем Ваше внимание, что итоги олимпиады подводятся как в целом по направлению (Математика-информатика), так и в номинации «Криптография». Основными критериями при подведении итогов по криптографии являются правильность решения задачи № 6 и достаточно успешное выполнение остальных заданий (степень успешности выполнения будет определяться решением жюри).
4. Завтра – 16 мая 2021 г. в 9.00 в ауд. 605 главного корпуса БГУ состоится разбор решений задач заключительного тура олимпиады ФПМИ, после которого можно будет посмотреть свои работы.
5. Закрытие олимпиады сразу после завершения разбора решений, просмотра работ и печати дипломов в той же аудитории 605 главного корпуса (предположительно не позднее 13.00).

1. На доске по определенному правилу записываются числа: 2, 4, 8, 14, 22,... . Какое число будет записано на 2021 месте?
2. Можно ли фигуру, изображённую ниже, разрезать на две пары равных частей так, чтобы из них можно было сложить квадрат?



3. В клетках прямоугольника 11×12 записаны нули. За один ход можно выбрать любой квадратик $k \times k$ и изменить все числа, записанные в клетках этого квадрата, на одно и то же целое (необязательно положительное) число. Можно ли в результате некоторого количества указанных операций получить прямоугольник, в котором одно число равно 36, а все остальные равны 0, если:
а) $k=2$? б) $k=3$?
4. Высоты AK и BL треугольника ABC пересекаются в точке H . Точки M и N – середины отрезков AB и CH соответственно. Докажите, что прямые MN и KL перпендикулярны.
5. В олимпиаде по математике принимал участие 101 семи- и восьмиклассник, каждый из которых до олимпиады отправил несколько СМС-сообщений с пожеланиями успехов некоторым другим участникам этой олимпиады. Оказалось, что каждый учащийся получил 40 сообщений и отправил 40 сообщений, причем никакие двое из них не обменялись сообщениями. Докажите, что после олимпиады любой участник может направить поздравление с окончанием любому другому участнику, быть может, пересылая его не более чем через двух других участников (каждый участник может отправлять сообщение-поздравление только тем учащимся, которым он пожелал удачи перед олимпиадой).
6. (Задача по криптографии) Знайка решил отправить Незнайке зашифрованное шифром перестановки послание. Для этого он разбил весь текст послания на несколько последовательных частей по 5 символов в каждой, после чего переставил местами символы в каждой из частей по одному и тому же правилу, которое сообщил Незнайке. Но Незнайка забыл это правило, поэтому ему нужна ваша помощь с расшифрованием полученного сообщения:

ЕПИРМПРМО_ТЕЕРСКАОНВЛИЯ_ВЯЯТЕСГ_НАААРМАМ.

Примечание: под символами понимаются буквы русского алфавита и пробел «_».

Желаем успеха !

9-10 класс

1. Время выполнения работы 4 часа (240 мин.).
2. Пользоваться калькулятором не разрешается.
3. Обращаем Ваше внимание, что итоги олимпиады подводятся как в целом по направлению (Математика-криптография), так и в номинации «Криптография». Основными критериями при подведении итогов по криптографии являются правильность решения задач № 5-6 и достаточно успешное выполнение остальных заданий (степень успешности выполнения будет определяться решением жюри).
4. **Завтра – 16 мая 2021 г. в 9.00 в ауд. 513 главного корпуса** БГУ состоится разбор решений задач заключительного тура олимпиады ФПМИ, после которого можно будет посмотреть свои работы.
5. Закрытие олимпиады сразу после завершения разбора решений, просмотра работ и печати дипломов в той же аудитории 513 главного корпуса (предположительно не позднее 13.00).

1. Пусть неотрицательные числа a , b , c удовлетворяют условию $a + b + c = 12$. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc + ac + abc$.

2. В треугольнике ABC проведены три высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 . Оказалось, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Какими могут быть углы этих треугольников?

3. Произведение всех делителей натурального числа N оканчивается на

- а) 2021 ноль.
- б) 2016 нулей.

На сколько нулей может оканчиваться число N ?

4. В Стране Дураков богатенький Буратино нашел клад из $k \cdot 10^3$ монет. Он решил положить 31 000 золотых монет на счета в 13 различных банках. Причем банки сами разделили между собой эти монеты. В каждом банке различное количество монет. Каждый месяц Буратино выбирает банк, где хранится наибольшее количество монет, забирает все монеты из него, а в остальные 12 банков кладет еще по 1000 золотых монет. Найдите минимальное целое значение k , чтобы данные операции можно было бы делать постоянно. Проценты за хранение денег в банках не начисляются.

5. Знайка решил отправить Незнайке зашифрованное шифром перестановки послание. Для этого он разбил текст послания на несколько равных по количеству символов частей, после чего переставил местами символы в каждой из частей по одному и тому же правилу, которое сообщил Незнайке. Но Незнайка забыл это правило, поэтому ему нужна ваша помощь с расшифрованием полученного сообщения:

ЕТРПО_НСОАЕТЬКУ_ВИМВЫСК_РЛАФС_РЫОПЗ_ЕАТАПД.

Примечание: под символами понимаются буквы русского алфавита и пробел «_».

6. Суммой двух букв русского алфавита назовем букву, порядковый номер которой в алфавите имеет тот же остаток от деления на 33, что и сумма порядковых номеров исходных двух букв. Сложение буквенных последовательностей выполняется посимвольно.

Некоторую последовательность 2020^{2021} раз прибавили к слову АЛИСА и получили слово БОРИС. Найдите эту последовательность. Какое наименьшее количество раз ее надо прибавить к слову БОРИС, чтобы получить слово АЛИСА?

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	

11 класс

1. *Время выполнения работы 4 часа (240 мин.).*
2. *Пользоваться калькулятором не разрешается.*
3. *Обращаем Ваше внимание, что итоги олимпиады подводятся как в целом по направлению (Математика-информатика), так и в номинации «Криптография». Основными критериями при подведении итогов по криптографии являются правильность решения задач № 5 и № 6 и достаточно успешное выполнение остальных заданий (степень успешности выполнения будет определяться решением жюри).*
4. *Завтра – 16 мая 2021 г. в 9.00 в ауд. 517 главного корпуса БГУ состоится разбор решений задач заключительного тура олимпиады ФПМИ, после которого можно будет посмотреть свои работы.*
5. *Заккрытие олимпиады сразу после завершения разбора решений, просмотра работ и печати дипломов в той же аудитории 517 главного корпуса (предположительно не позднее 13.00).*

1. Требуется построить некоторое количество одинаковых жилых домов суммарной жилой площади 40000 м^2 . Затраты на постройку одного дома, имеющего $N \text{ м}^2$ жилой площади, складываются из стоимости наземной части, пропорциональной $N\sqrt{N}$, и стоимости фундамента, пропорциональной $\sqrt{N}$. Строительство дома на 1600 м^2 обходится в 184800 руб., причем в этом случае стоимость наземной части составляет 32% стоимости фундамента. Определить, сколько нужно построить домов, чтобы сумма затрат была наименьшей, и найти эту сумму.
2. Найти все значения x , удовлетворяющие одновременно условиям:

$$\cos 13x = \cos x, \quad \cos 2x + \sin 5x = 1, \quad |x| < 3.$$
3. Расстояния от точки M до трех вершин A , B и C прямоугольника $ABCD$ равны соответственно 3, 5 и 4. Найти площадь прямоугольника.
4. Имеется цепочка длины n (т.е. состоящая из n звеньев). Какое минимальное число звеньев нужно разжать, чтобы можно было построить набор из k звеньев для любого $k = 1, 2, \dots, n$. В качестве примера отметим, что в случае $n = 7$ достаточно разжать одно звено под номером 3.
5. Сейф устроен следующим образом: по введенному паролю x , состоящему только из цифр, вычисляется некоторая функция $f(x)$. Если $f(x) = 0$, то сейф открывается.
 Вам удалось узнать, что $f(x)$ квадратный трехчлен, кроме того, преобразование $f(x)$ удовлетворяет следующим соотношениям: $f(5) = -25$, $f(2) = 8$, $f(12) = 38$. Найдите возможные пароли x , открывающие сейф.
6. Теперь, чтобы открыть сейф надо найти такое целое число d , что $d * e \bmod M = 1$, где запись «...mod M » означает нахождение остатка при делении на M . Числа e и M – некоторые фиксированные параметры, причем известно, что $M = (p-1)*(q-1)$, где p и q – неизвестные простые числа, такие что $|\log_2 p - \log_2 q| < 1$.

В ходе наблюдения за сейфом удалось вычислить: 1) значение параметра e , 2) число $N = p * q$, 3) число $m = q \bmod (p-1)$. Опишите алгоритм нахождения числа d для открытия сейфа. Считайте, что число N настолько большое, что зная только его, найти разложение числа N на множители p и q за разумное время не представляется возможным. Найдите число d , если $e = 31$, $N = 27221$, $m = 5$.