

**Условия и РЕШЕНИЯ задач первого тура олимпиады
по математике, информатике и криптографии**

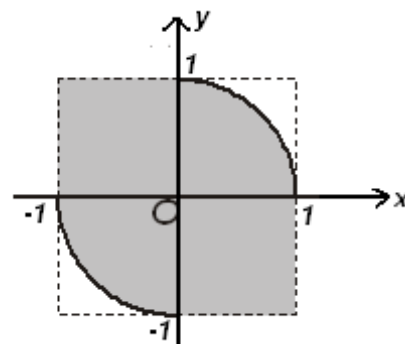
Задачи для учащихся 11 класса («Абитуриент БГУ – 2022»)

1. Изобразите на координатной плоскости множество всех точек, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \geq xy$.

Решение. Данное неравенство равносильно

совокупности систем: $\begin{cases} |x| \leq 1, \\ |y| \leq 1, \\ xy \leq 0 \end{cases}$ или

$$\begin{cases} |x| \leq 1, \\ |y| \leq 1, \\ xy > 0, \\ (1-x^2)(1-y^2) \geq x^2y^2 \end{cases}.$$



Множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих первой системе, представляет собой объединение двух квадратов со стороной 1, расположенных во II и IV координатных четвертях. Учитывая, что последнее неравенство второй системы равносильно неравенству $x^2 + y^2 \leq 1$, получим, что множество точек, удовлетворяющих второй системе – объединение двух «четвертинок» единичного круга, расположенных в I и III координатных четвертях.

2. Решите уравнение

$$\left| \left| \left| \dots \left| \left| \left| |x| + 2022| - 2021| + 2020| - 2010| + \dots + 2| - 1| \right| \right| \right| \right| \right| = 1011$$

Ответ. $x = 0$.

Решение. Так как при положительных значениях параметра a выполняется:

$$||x| + a + 1| - a = |x| + 1,$$

то получаем уравнение $|x| = 0$.

3. Решить уравнение $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos x \cos 2x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos 2x \cos 3x}$.

Ответ: $\frac{\pi}{12} + \pi k, \frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Решение: Областью определения задачи является множество значений аргумента, удовлетворяющее условию $\sin x \cos x \cos 2x \cos 3x \neq 0$ или $\sin 4x \cos 3x \neq 0$. На области определения последовательно выполним следующие тождественные преобразования:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos x \cos 2x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} = \frac{\cos 2x + 1}{\cos x \cos 2x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} = \\
& = \frac{2 \cos^2 x}{\cos x \cos 2x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} = \frac{2 \cos x}{\cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} - \frac{1}{\sin x} = \\
& = \frac{2 \cos x \cos 3x + 1}{\cos 2x \cos 3x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\cos 2x + \cos 4x + 1}{\cos 2x \cos 3x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\cos 2x + 2 \cos^2 4x}{\cos 2x \cos 3x} - \frac{1}{\sin x} = \\
& = \frac{1 + 2 \cos 2x}{\cos 3x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x + 2 \sin x \cos 2x - \cos 3x}{\sin x \cos 3x} = \frac{\sin x + \sin 3x - \sin x - \cos 3x}{\sin x \cos 3x} = \\
& = \frac{\operatorname{tg} 3x - 1}{\sin x}.
\end{aligned}$$

Таким образом, на области определения исходное уравнение равносильно уравнению

$$\operatorname{tg} 3x = 1.$$

Решениями этого уравнения являются значения $x = \frac{(4m+1)\pi}{12}$, $m \in Z$. Из полученного множества следует удалить те значения, которые не принадлежат области определения. Здесь, прежде всего, отметим, что при найденных x $\cos 3x \neq 0$ ($\operatorname{tg} 3x$ определен). Другие значения, не принадлежащие области определения, найдем как корни уравнения

$$\sin 4x = 0,$$

откуда $x = \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$. Определим, какие из них попадают в множество определенных выше решений. Для этого получаем уравнение

$$\frac{(4m+1)\pi}{12} = \frac{\pi n}{4}$$

или

$$3n - 4m = 1. \quad (*)$$

Последнему уравнению в целых числах удовлетворяет пара $n = 3$, $m = 2$, поскольку справедливо равенство

$$3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 1.$$

Вычитая последнее равенство из (*), получаем:

$$3(n-3) = 4(m-2).$$

Поскольку числа 3 и 4 взаимно просты, то из полученного равенства следует, что $m-2$ кратно 3, т.е. $m = 3k + 2$, $k \in Z$. Именно эти значения необходимо исключить из формулы

общего решения. Таким образом, в формуле общего решения целочисленная переменная m может принимать значения $3k$ (и тогда $x = \frac{\pi}{12} + \pi k$) и $3k+1$ (и тогда $x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$).

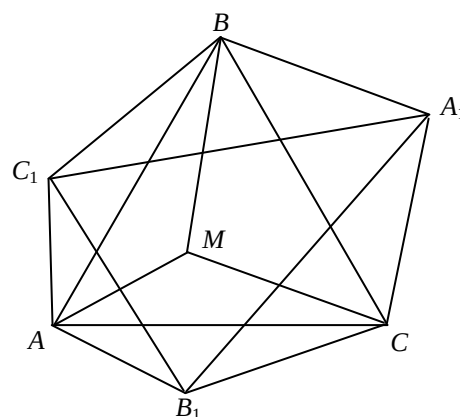
4. Внутри правильного треугольника имеется точка, удаленная от его вершин на расстояния 5, 6 и 7. Найдите площадь треугольника.

Ответ: $\frac{1}{4}(36\sqrt{6} + 55\sqrt{3})$.

Решение: Пусть M – указанная в условии задачи точка внутри треугольника ABC , причем $AM = 5$, $CM = 6$, $BM = 7$. Рассмотрим точки A_1, B_1, C_1 , симметричные точке M относительно сторон BC, AC и AB соответственно. Тогда в силу симметрии имеем:

$$\triangle AC_1B = \triangle AMB, \triangle BA_1C = \triangle BMC, \triangle AB_1C = \triangle AMC$$

Таким образом, площадь шестиугольника $AC_1BA_1CB_1$ равна удвоенной площади треугольника ABC . С другой стороны, эта площадь может быть вычислена как сумма площадей треугольников $C_1AB_1, B_1CA_1, A_1BC_1$ и $A_1B_1C_1$, в которых необходимые для вычисления величины либо известны, либо могут легко быть вычислены. Действительно, в треугольнике C_1AB_1 в силу симметрии $AC_1 = AM = AB_1 = 5$, $\angle C_1AB_1 = 120^\circ$. Тогда



$$S_{AC_1B_1} = \frac{1}{2} AC_1 \cdot AB_1 \cdot \sin \angle C_1AB_1 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

и по теореме косинусов

$$B_1C_1^2 = AC_1^2 + AB_1^2 - 2AC_1 \cdot AB_1 \cdot \cos \angle C_1AB_1 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 75,$$

т.е. $B_1C_1 = 5\sqrt{3}$.

Аналогично из треугольника B_1CA_1 , в котором $B_1C = CM = CA_1 = 6$, $\angle A_1CB_1 = 120^\circ$, находим:

$$S_{A_1CB_1} = \frac{1}{2} A_1C \cdot CB_1 \cdot \sin \angle A_1CB_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{36\sqrt{3}}{4},$$

$$B_1A_1^2 = A_1C^2 + CB_1^2 - 2A_1C \cdot CB_1 \cdot \cos \angle A_1CB_1 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 108,$$

т.е. $B_1A_1 = 6\sqrt{3}$, а из треугольника C_1BA_1 –

$$S_{A_1BC_1} = \frac{1}{2} A_1B \cdot C_1B \cdot \sin \angle A_1BC_1 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4},$$

$$C_1A_1^2 = A_1B^2 + C_1B^2 - 2A_1B \cdot C_1B \cdot \cos \angle A_1BC_1 = 7^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 147,$$

т.е. $C_1A_1 = 7\sqrt{3}$.

Теперь площадь треугольника $A_1B_1C_1$ найдем по формуле Герона:

$$S_{A_1B_1C_1} = 18\sqrt{6}.$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{AC_1BA_1CB_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} (25 + 36 + 49) + 18\sqrt{6} \right) = \frac{55\sqrt{3} + 36\sqrt{6}}{4}.$$

5. Два автомобиля едут по шоссе друг за другом на расстоянии 20 м с одинаковой скоростью $24 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$. Водители, увидев впереди препятствие, начинают тормозить. В результате автомобили переходят на равнозамедленное движение с ускорениями a_1 и a_2 ($a_1 < 0$, $a_2 < 0$) и движутся так до полной остановки. Водитель переднего автомобиля начал торможение на 2 сек раньше водителя заднего автомобиля. Ускорение переднего автомобиля $a_1 = -4 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$. Наименьшее расстояние, на которое сблизились автомобили, равнялось 4 м. Определите, какой автомобиль остановился раньше, и найти ускорение a_2 заднего автомобиля.

Ответ: Первым остановился задний автомобиль; $a_2 = -8 \left(\frac{\text{м}}{\text{сек}^2} \right)$.

Решение: Для решения задачи нам понадобятся уравнения равнопеременного движения

$$v(t) = v_0 + at,$$

$$s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Выберем за начальную точку для анализа задачи момент времени, когда начал тормозить водитель заднего автомобиля. К этому моменту передний автомобиль уже 2 сек двигался с ускорением $a_1 = -4 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$ и, следовательно, его скорость к этому моменту составила

$$v_{1,0} = 24 - 2 \cdot 4 = 16 \left(\frac{\text{м}}{\text{сек}} \right),$$

а пройденное расстояние равно

$$s_1(t) = 24 \cdot 2 - \frac{4 \cdot 2^2}{2} = 40 \text{ (м)}.$$

За эти же 2 сек задний автомобиль, двигаясь равномерно с начальной скоростью $24 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$, прошел расстояние, равное

$$s_2 = 24 \cdot 2 = 48 \text{ (м)}.$$

Поэтому в момент времени, принятый за начало отсчета, расстояние между автомобилями составило $20 + (40 - 48) = 12$ (м). Пользуясь выписанными выше уравнениями равнопеременного движения, составим за зависящую от времени функцию расстояния между автомобилями с указанным началом отсчета:

$$\begin{aligned} d(t) &= d_0 + (s_1(t) - s_2(t)) = 12 + \left(\left(v_{1,0}t + \frac{(-4) \cdot t^2}{2} \right) - \left(v_{2,0}t + \frac{a_2 \cdot t^2}{2} \right) \right) = \\ &= 12 + 16t - \frac{4t^2}{2} - 24t - \frac{a_2 t^2}{2} = 12 - 8t - \frac{(a_2 + 4)t^2}{2}, \end{aligned}$$

где a_2 – искомое ускорение заднего автомобиля. Указанная формула будет работать лишь для значений t , при которых оба автомобиля находятся в движении. При этом передний автомобиль остановится через 4 сек после избранного нами начала отсчета, а задний – через $t_{2\text{ост}} = -\frac{24}{a_2}$ сек. Отметим, что до остановки первый автомобиль успеет пройти

$$s_{1\text{ост}} = 16 \cdot 4 - \frac{4 \cdot 4^2}{2} = 32 \text{ (м)},$$

а второй –

$$s_{2\text{ост}} = 24 \cdot t_{2\text{ост}} - \frac{a_2}{2} \cdot t_{2\text{ост}}^2 = 24 \cdot \left(-\frac{24}{a_2} \right) - \frac{a_2}{2} \cdot \left(-\frac{24}{a_2} \right)^2 = -\frac{288}{a_2} \text{ (м)}.$$

Предположим, что раньше остановился первый автомобиль. Это возможно в том случае, если $t_{2\text{ост}} > 4$, т.е. $-\frac{24}{a_2} > 4$, откуда $a_2 > -6$. При этом, поскольку

$$\begin{aligned} v_1(t) &= 16 - 4t, \\ v_2(t) &= 24 + a_2 t, \end{aligned}$$

то

$$v_2(t) - v_1(t) = 8 + (a_2 + 4)t > 8 + (-6 + 4)t = 8 - 2t > 0$$

для всех $t < 4$, т.е. задний автомобиль до остановки первого движется быстрее его. Следовательно, минимальное расстояние между автомобилями будет в момент остановки заднего. При этом учитывая, что по условию это расстояние равно 4 м, а в начальный момент оно составляло 12 м, получаем, что второй автомобиль должен до остановки пройти $32 + 8 = 40$ (м). Следовательно, получаем уравнение

$$-\frac{288}{a_2} = 40,$$

откуда

$$a_2 = -\frac{36}{5} < -6.$$

Таким образом, рассматриваемая ситуация не может быть реализована и, значит, первым должен остановиться задний автомобиль. В этом случае

$$d_{\min} = \min_{t \leq t_{2ocm}} d(t) = \min_{t \leq t_{2ocm}} \left(12 - 8t - \frac{(a_2 + 4)t^2}{2} \right).$$

Функция, стоящая под знаком минимума, является квадратным трехчленом с положительным (в этом случае: $a_2 < -6$) коэффициентом. Минимум такой функции достигается в точке, являющейся абсциссой вершины параболы, т.е. при

$$t_g = -\frac{8}{a_2 + 4}.$$

Очевидно, в рассматриваемом диапазоне значений a_2 выполняется неравенство $t_g < t_{2ocm}$. Поэтому данная точка действительно является точкой минимума. При этом

$$d_{\min} = d(t_g) = 12 - 8 \cdot \left(-\frac{8}{a_2 + 4} \right) - \frac{a_2 + 4}{2} \cdot \left(-\frac{8}{a_2 + 4} \right)^2 = 12 + \frac{32}{a_2 + 4} = 4,$$

откуда

$$a_2 = -8 \left(\frac{M}{\text{сек}^2} \right).$$

6. Имеется связный граф, степень каждой вершины которого равна 3. Дайте словесное описание алгоритма, с помощью которого можно найти в этом графе цикл нечетной длины.

Решение:

1. Выберем в качестве начальной вершины вершину с номером 1. Будем считать, что построен путь (1).
2. Найдем вершину v , смежную последней вершине построенного пути.
3. Если эта вершина не принадлежит пути, то добавим ее в путь, и вернемся на шаг 1.
4. Если вершина v принадлежит пути, то тогда получился цикл, в который входят вершины, начинающийся с вершины v , и заканчивающийся последней вершиной пути w . Если этот цикл имеет нечетную длину, то решение получено. Пусть это не так, и этот цикл (обозначим его $C[v, w]$) имеет четную длину.
5. В силу того, что вершина w имеет степень 3, существует еще одна вершина, пусть x , которая смежна последней вершине w пути. Таким образом мы сможем дойти до некоторой вершине w_1 , которой будет смежна некоторая вершина из пути. Пусть это вершина v_1 . Если цикл имеет нечетную длину, то решение построено.
6. Пусть цикл $C[v_1, w_1]$ имеет четную длину.
7. В силу того, что степень вершины 1 равна трем, всегда найдется 2 пути, у одного из которых последняя вершина x_1 , а у другого x_2 , которые смежны начальной вершине 1. При этом один путь является начальной частью другого.
8. Если каждый из соответствующих циклов $C[1, x_1]$ и $C[1, x_2]$ имеют четную длину, то тогда цикл, содержащий вершину 1, а также вершины от x_1 до x_2 из более длинного пути будет иметь нечетную длину.

7. При шифровании Незнайка каждую букву исходного текста заменяет на соответствующую букву из таблицы. Например, слово «ГДЕ» будет зашифровано с помощью следующей таблицы в слово «ВФЙ».

А	Б	В	Г	Д	Е	...	Э	Ю	Я
З	О	Я	В	Ф	Й		Ы	Ю	А

В первой строке таблицы размещены все буквы русского алфавита. Во второй строке – те же буквы, но в другом порядке.

Незнайка зашифровал сообщение с помощью некоторой таблицы и получил следующий текст (знаки препинания пропущены; пробелы служат лишь для удобного восприятия и не обозначают пробелы между словами; вышеприведенный пример никак не связан с таблицей, которую использовал Незнайка):

ЛЪАУЛ ВИУЛМ ГВЯВЛ ЪКЁЪЗ ГПЖЁЪ КЁУГТ ЧЛЪГТ УЗЮАУ ЭТУЁВ
СЧЗГП ЪЁЧРЛ ЪТЮГП МГУКГ ТМВЛЛ УЩТЁБ ГУГТЧ

Затем Незнайке зашифровал получившейся текст еще раз той же таблицей и получил следующий результат:

ЗЮЪБЗ МЧБЗН ХМПМЗ ЮАФЮР ХЪЯФЮ АФБХТ ЭЗЮХТ БРЫЪБ
ЕТБФМ ГЭРХЪ ШФЭЁЗ ЮТЫХЪ НХБАХ ТНМЗЗ БОТФК ХБХТЭ

Восстановите исходное сообщение.

Ответ: НАКОНЕЦ ОН ВСЕ ЖЕ НАБРАЛСЯ ХРАБРОСТИ НАСТОЛЬКО ЧТО РЕШИЛСЯ ПРИЗНАТЬСЯ В СОБСТВЕННОЙ ТРУСОСТИ (цитата из "Незнайка на Луне").

Решение И так, что произошло. Незнайка взял некоторое сообщение X и зашифровал его с помощью неизвестной таблицы, получил сообщение Y_1 (первое сообщение, данное в условии). Затем он взял Y_1 и зашифровал его с помощью той же таблицы, получив сообщение Y_2 (второе сообщение, данное в условии). Получаем, что символы Y_1 с помощью таблицы Незнайки переходят в символы сообщения Y_2 . Например, рассмотрим первые символы. Получаем, что буква "Л" с помощью таблицы Незнайки переходит в букву "З". Откуда следует, что в таблице Незнайки под буквой "Л" стоит буква "З". Пройдя по всем символам сообщений, мы частично восстановим таблицу Незнайки:

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
Ъ	К	М	Х			Ф	Я	Р	Ч		А	З	Н			Ъ

Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
Ё	Г	Т	Б				Э		О	Ш		Ю	Е	Ы	П

После этого уже можно попытаться расшифровать сообщение Y_1 , заменяя символы в таблице в обратном порядке (т.е. снизу вверх).

АК В С Ж АБРАЛ СЯ РА БР СТ И АСТ ЛЬК ЧТ Р ИЛСЯ ПРИЗ
АТЬСЯ ВС БС ТВ ТРУ С СТИ

Далее надо восстанавливать текст и таблицу, учитывая, что исходное сообщение было осмысленным текстом на русском языке. Например, рассмотрим фрагмент " _ИЛСЯ ПРИЗ _АТЬСЯ". У нас есть кусочек "ИЛСЯ", на который обычно заканчиваются глаголы,

значит, после него, скорее всего, начинается новое слово "ПРИЗ_ АТЬСЯ". Надо подставить одну из букв, которую мы еще не знаем как зашифровывать (Д, Е, Ё, Н, О, Ф, Х, Ц, Ш, Ы). Наилучшим образом подходит буква "Н": "ПРИЗНАТЬСЯ". Получается, что в зашифрованном сообщении букве "Н" соответствует буква "Л".

Еще можно рассмотреть последние 8 символов сообщения "ТРУ С_СТИ", перебирая оставшиеся буквы, единственный осмысленный вариант получается, когда подставляется буква "О": "ТРУСОСТИ". Получается, что в зашифрованном сообщении букве "О" соответствует буква "У". Получаем дополненную таблицу, с помощью которой расшифровать еще несколько букв исходного сообщения:

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
Ь	К	М	Х			Ф	Я	Р	Ч		А	З	Н	Л	У	Ь

Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
Ё	Г	Т	Б				Э		О	Ш		Ю	Е	Ы	П

НАК_Н_ ОНВ С_Ж_Н АБРАЛ СЯ_РА БРОСТ ИНАСТ ОЛЬКО ЧТОР_ _ИЛСЯ ПРИЗНАТЬСЯ ВСОБС ТВ_НН Й_ТРУ СОСТИ.

Продолжив анализировать получающийся исходный текст и добавляя символы в таблицу, получим исходное сообщение: НАКОНЕЦ ОН ВСЕ ЖЕ НАБРАЛСЯ ХРАБРОСТИ НАСТОЛЬКО ЧТО РЕШИЛСЯ ПРИЗНАТЬСЯ В СОБСТВЕННОЙ ТРУСОСТИ (цитата из "Незнайка на Луне").

Задачи для учащихся 9-10 класса (творческая олимпиада)

1. Изобразите на координатной плоскости множество всех точек, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \geq xy$.

Решение. Данное неравенство равносильно

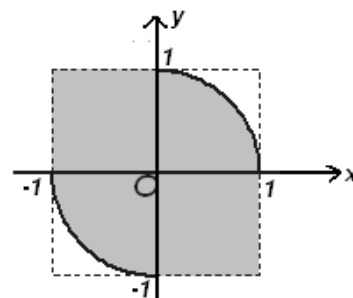
совокупности

систем:

$$\begin{cases} |x| \leq 1, \\ |y| \leq 1, \\ xy \leq 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} |x| \leq 1, \\ |y| \leq 1, \\ xy > 0, \\ (1-x^2)(1-y^2) \geq x^2y^2 \end{cases}.$$



Множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих первой системе, представляет собой объединение двух квадратов со стороной 1, расположенных во II и IV координатных четвертях. Учитывая, что последнее неравенство второй системы равносильно неравенству $x^2 + y^2 \leq 1$, получим, что множество точек, удовлетворяющих второй системе – объединение двух «четвертинок» единичного круга, расположенных в I и III координатных четвертях.

2. Решите уравнение

$$\left| \left| \left| \dots \left| \left| |x| + 2022| - 2021| + 2020| - 2010| + \dots + 2| - 1| \right| \right| \right| \right| = 1011$$

Ответ. $x = 0$.

Решение. Так как при положительных значениях параметра a выполняется:

$$||x| + a + 1| - a = |x| + 1,$$

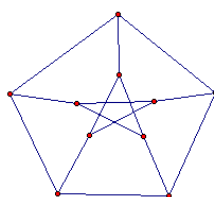
то получаем уравнение $|x| = 0$.

3. В некотором государстве система авиалиний устроена таким образом, что любой город соединен авиалиниями не более, чем с тремя другими, и из любого города можно попасть в любой другой, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее количество городов может быть в этом государстве?

Ответ: 10.

Решение. Рассмотрим один из городов, обозначив его A . Тогда из города A можно попасть напрямую не более, чем в три города. а с одной пересадкой – еще не более, чем в $3 \cdot 2 = 6$ городов (каждый из этих трех городов может быть еще соединен не более, чем с двумя). Таким образом, всего городов может быть не более десяти.

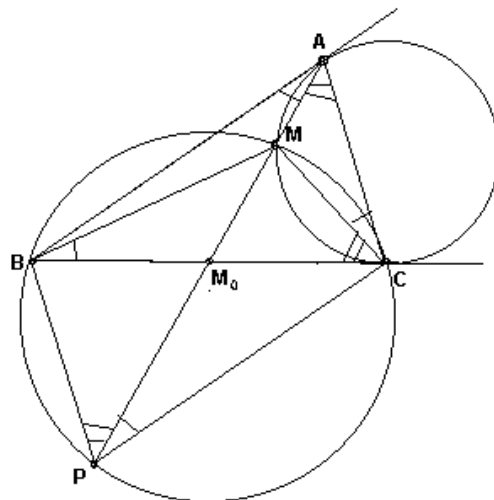
Пример такого государства:



4. Окружность S_1 касается сторон угла ABC в точках A и C . Окружность S_2 касается прямой AC в точке C и проходит через точку B . M – вторая точка пересечения окружностей S_1 и S_2 . В каком отношении прямая AM делит отрезок BC ?

Ответ: $1 : 1$.

Решение. Пусть прямая AM пересекается с отрезком BC в точке M_0 , а окружность S_2 эта же прямая вторично пересекает в точке P . Тогда, используя свойство углов между касательной и хордой и свойство вписанных углов, опирающихся на одну дугу, получим, что $\angle BAP = \angle ACM = \angle MBC = \angle MPC$ и $\angle MAC = \angle BCM = \angle BPM$. Следовательно, четырехугольник $ABPC$ – параллелограмм, значит $BM_0 = CM_0$.



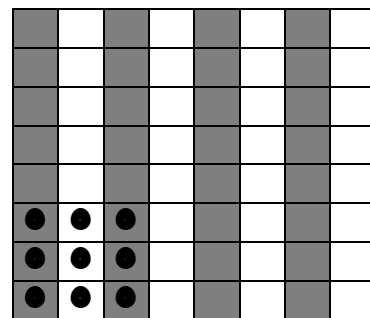
5. На доске 8×8 в углу расставлены 9 фишек в форме квадрата 3×3 . Любая фишка может прыгать через другую фишку на свободную клетку (по горизонтали, вертикали или диагонали). Можно ли за некоторое количество прыжков расставить фишки в форме такого же квадрата в каком-либо другом углу доски?

Ответ: нет, нельзя.

Решение. Без ограничения общности можно считать, что фишки стоят в левом нижнем углу доски. Докажем, что в правых углах доски поставить фишки невозможно. Покрасим вертикали доски в черный и белый цвета, чередуя их (иначе говоря, «матрасиком», см. рис. 2). Заметим, что любой прыжок фишки не изменяет цвета вертикали, в которой она стояла. Изначально 6 фишек стояли в «черных» вертикалях, а 3 фишки – в «белых», а в конечной расстановке должно быть наоборот. Значит, такая расстановка невозможна.

Для того, чтобы доказать, что фишки нельзя расставить в левом верхнем углу доски, надо «матрасиком» раскрасить горизонтали и провести аналогичное рассуждение.

Отметим, что для доказательства невозможности расстановки фишек в соседних углах доски хватает и «шахматной» раскраски.



6. Существует ли такое натуральное число N , что если приписать его к самому себе, то получится полный квадрат?

Ответ: существует.

Решение. $\overline{NN} = N(10^k + 1)$, где k – количество цифр в десятичной записи числа N . Выберем значение k таким образом, чтобы число $10^k + 1$ делилось на квадрат натурального числа, отличного от 1. Например, рассмотрим число $10^{11} + 1 = (10 + 1)(10^{10} - 10^9 + \dots - 10 + 1)$. Вторая скобка делится на 11, так как в ней 11 слагаемых, причем $10^{2n} \equiv 1 \pmod{11}$ и $-10^{2n-1} \equiv 1 \pmod{11}$. Следовательно, рассматриваемое число делится на 11^2 .

Пусть $10^{11} + 1 = 121x$, тогда возьмем N , равное $100x$. Получим, что $\overline{NN} = N(10^{11} + 1) = (11 \cdot 10 \cdot x)^2$. Осталось доказать, что число N – одиннадцатизначное, то есть, что число x – девятизначное. Действительно, $x = \frac{10^{11} + 1}{121} < \frac{121 \cdot 10^9}{121} = 10^9$ и $x = \frac{10^{11} + 1}{121} > \frac{10^{11} + 1}{10^3} > 10^8$.

На самом деле: $10^{11} + 1 = 121 \cdot 826446281$, $N = 100 \cdot 826446281$, то есть $\overline{NN} = (10 \cdot 11 \cdot 826446281)^2$.

7. При шифровании Незнайка каждую букву исходного текста заменяет на соответствующую букву из таблицы. Например, слово «ГДЕ» будет зашифровано с помощью следующей таблицы в слово «ВФЙ».

А	Б	В	Г	Д	Е	...	Э	Ю	Я
З	О	Я	В	Ф	Й		Ы	Ю	А

В первой строке таблицы размещены все буквы русского алфавита. Во второй строке – те же буквы, но в другом порядке.

Незнайка зашифровал сообщение с помощью некоторой таблицы и получил следующий текст (знаки препинания пропущены; пробелы служат лишь для удобного восприятия и не обозначают пробелы между словами; вышеприведенный пример никак не связан с таблицей, которую использовал Незнайка):

ЛЪАУЛ ВИУЛМ ГВЯВЛ ЪКЁЪЗ ГПЖЁЪ КЁУГТ ЧЛЪГТ УЗЮАУ ЭТУЁВ
СЧЗГП ЪЁЧРЛ ЪТЮГП МГУКГ ТМВЛЛ УЩТЁБ ГУГТЧ

Затем Незнайке зашифровал получившейся текст еще раз той же таблицей и получил следующий результат:

ЗЮЁБЗ МЧБЗН ХМПМЗ ЮАФЮР ХЪЯФЮ АФБХТ ЭЗЮХТ БРЫЬБ
ЕТЬФМ ГЭРХЪ ШФЭЁЗ ЮТЫХЪ НХБАХ ТНМЗЗ БОТФК ХБХТЭ

Восстановите исходное сообщение.

Ответ: НАКОНЕЦ ОН ВСЕ ЖЕ НАБРАЛСЯ ХРАБРОСТИ НАСТОЛЬКО ЧТО РЕШИЛСЯ ПРИЗНАТЬСЯ В СОБСТВЕННОЙ ТРУСОСТИ (цитата из "Незнайка на Луне").

Решение И так, что произошло. Незнайка взял некоторое сообщение X и зашифровал его с помощью неизвестной таблицы, получил сообщение Y_1 (первое сообщение, данное в условии). Затем он взял Y_1 и зашифровал его с помощью той же таблицы, получив сообщение Y_2 (второе сообщение, данное в условии). Получаем, что символы Y_1 с помощью таблицы Незнайки переходят в символы сообщения Y_2 . Например, рассмотрим первые символы. Получаем, что буква "Л" с помощью таблицы Незнайки переходит в букву "З". Откуда следует, что в таблице Незнайки под буквой "Л" стоит буква "З". Пройдя по всем символам сообщений, мы частично восстановим таблицу Незнайки:

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
Ъ	К	М	Х			Ф	Я	Р	Ч		А	З	Н			Ъ

Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
Ё	Г	Т	Б				Э		О	Ш		Ю	Е	Ы	П

После этого уже можно попытаться расшифровать сообщение Y_1 , заменяя символы в таблице в обратном порядке (т.е. снизу вверх).

АК _В С Ж_ АБРАЛ СЯ РА БР_СТ И_АСТ _ЛБК_ ЧТ_Р_ _ИЛСЯ ПРИЗ_АТЬСЯ ВС_БС ТВ____ТРУ С_СТИ

Далее надо восстанавливать текст и таблицу, учитывая, что исходное сообщение было осмысленным текстом на русском языке. Например, рассмотрим фрагмент " _ИЛСЯ ПРИЗ_ АТЬСЯ". У нас есть кусочек "ИЛСЯ", на который обычно заканчиваются глаголы, значит, после него, скорее всего, начинается новое слово "ПРИЗ_ АТЬСЯ". Надо подставить одну из букв, которую мы еще не знаем как зашифровывать (Д, Е, Й, Н, О, Ф, Х, Ц, Ш, Ы). Наилучшим образом подходит буква "Н": "ПРИЗНАТЬСЯ". Получается, что в зашифрованном сообщении букве "Н" соответствует буква "Л".

Еще можно рассмотреть последние 8 символов сообщения "ТРУ С_СТИ", перебирая оставшиеся буквы, единственный осмысленный вариант получается, когда подставляется буква "О": "ТРУСОСТИ". Получается, что в зашифрованном сообщении букве "О" соответствует буква "У". Получаем дополненную таблицу, с помощью которой расшифровать еще несколько букв исходного сообщения:

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
Ь	К	М	Х			Ф	Я	Р	Ч		А	З	Н	Л	У	Ь

Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
Ё	Г	Т	Б				Э		О	Ш		Ю	Е	Ы	П

НАК Н _ОНВ С Ж Н АБРАЛ СЯ РА БРОСТ ИНАСТ ОЛЬКО ЧТОР_ _ИЛСЯ ПРИЗНАТЬСЯ ВСОБС ТВ_НН Й_ТРУ СОСТИ.

Продолжив анализировать получающийся исходный текст и добавляя символы в таблицу, получим исходное сообщение: НАКОНЕЦ ОН ВСЕ ЖЕ НАБРАЛСЯ ХРАБРОСТИ НАСТОЛЬКО ЧТО РЕШИЛСЯ ПРИЗНАТЬСЯ В СОБСТВЕННОЙ ТРУСОСТИ (цитата из "Незнайка на Луне").

Задачи для учащихся 7-8 классов (подготовительная олимпиада)

1. Увлечшись бегом трусцой, Ярослав Борисович подговорил своего друга Игната Михайловича совершать небольшие пробежки по периметру круглого стадиона гимназии № 2022. Во время одной такой пробежки они заметили, что бегают они всегда равномерно и в одном направлении, причем Ярослав Борисович пробегает полный круг на 3 минуты быстрее, чем Игнат Михайлович. Время между их последовательными встречами равно 18 минутам. Определите время, за которое Ярослав Борисович пробегает один круг.

Ответ: 6 мин.

Решение. Пусть длина всего стадиона S , Ярослав Борисович преодолевает весь стадион за время t , а значит её скорость S/t . Тогда Игнат Михайлович – за время $t+3$, со скоростью $S/(t+3)$. Составим уравнение, для чего длину пути, пройденного Ярославом Борисовичем до встречи приравняем к длине всей окружности плюс длине пути пройденного более медленным телом:

$$18 \frac{S}{t} = 18 \frac{S}{t+3} + S$$

Откуда $t=6$ мин.

2. Существует ли такое целое число, которое при зачеркивании первой цифры уменьшается в 2022 раза? (Примечание: в условии подразумевается, что после зачеркивания незначащие нули в начале получаемого числа отбрасываются, например, число 100123 превращается в 123).

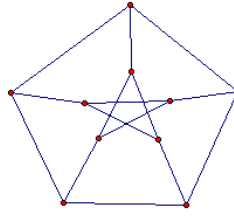
Ответ: нет.

Решение. Пусть a – первая цифра числа. Представим его в виде $10^k a + b$. Тогда по условию должно быть $10^k a + b = 2022b$, или $10^k a = 2021b$, что невозможно, т.к. a – цифра, а число 2021 делится на 43.

3. В некотором государстве система авиалиний устроена таким образом, что любой город соединен авиалиниями не более, чем с тремя другими, и из любого города можно попасть в любой другой, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее количество городов может быть в этом государстве?

Ответ: 10.

Решение. Рассмотрим один из городов, обозначив его A . Тогда из города A можно попасть напрямую не более, чем в три города. а с одной пересадкой – еще не более, чем в $3 \cdot 2 = 6$ городов (каждый из этих трех городов может быть еще соединен не более, чем с двумя). Таким образом, всего городов может быть не более десяти.
Пример такого государства:



4. Петя и Вася играют в следующую игру. Петя загадывает некоторое число от 30000 до 60000, и говорит Васе остатки деления этого числа на 14, 15, 16 и 17. Может ли Вася однозначно определить, какое число загадал Вася?

Ответ. Не может.

Решение. Пусть Петя загадал число $n=30000$. Такие же остатки при делении на 14, 15, 16 и 17 дает число $30000+\text{НОК}(14;15;16;17)=58560$.

5. а) На доске 8×8 в углу расставлены 4 фишки в форме квадрата 2×2 . Любая фишка может прыгать через другую фишку на свободную клетку (по горизонтали, вертикали или диагонали). Можно ли за некоторое количество прыжков расставить фишки в форме такого же квадрата в каком-либо другом углу доски?
- б) На доске 8×8 в углу расставлены 9 фишек в форме квадрата 3×3 . Любая фишка может прыгать через другую фишку на свободную клетку (по горизонтали, вертикали или диагонали). Можно ли за некоторое количество прыжков расставить фишки в форме такого же квадрата в каком-либо другом углу доски?

Ответ. а) можно; б) нельзя.

Решение. а) Пусть четыре фишки стоят в левом верхнем углу, а в верхнем ряду – фишки «1» и «2». Прыгать будет все время слева направо: вначале фишкой «1» через «2», затем «2» через «1» и т.д., пока две данные фишки не расположатся в правом верхнем углу. То же самое сделаем с фишками второго ряда.

б) см. решение задачи №5 для 9–10 кл.

6. В узлах сетки 3×2022 стоят красные точки (в каждой строчке – 2022 точки и в каждом столбце – 3 точки). Сколько можно провести прямых, проходящих ровно через 3 красные точки?

Ответ. $1011 \times 1011 \times 2 = 2044242$.

Решение. Проводить прямые через любые две точки в одной строке не имеет смысла, ибо тогда они пройдут через 2022 точки. Тогда занумеруем точки верхней и нижней строки от 1 до 2022. Для того чтобы какая-то прямая проходила через некоторую точку средней строки необходимо и достаточно, чтобы она проходила через любые две точки верхней и нижней строки одной четности. Тогда для «нечетных» точек получится 1011×1011 прямых, и столько же для «четных» точек.

7. При шифровании Незнайка каждую букву исходного текста заменяет на соответствующую букву из таблицы. Например, слово «ГДЕ» будет зашифровано с помощью следующей таблицы в слово «ВФЙ».

А	Б	В	Г	Д	Е	...	Э	Ю	Я
З	О	Я	В	Ф	Й		Ы	Ю	А

В первой строке таблицы размещены все буквы русского алфавита. Во второй строке – те же буквы, но в другом порядке.

Незнайка зашифровал сообщение с помощью некоторой таблицы и получил следующий текст (знаки препинания пропущены; пробелы служат лишь для удобного восприятия и не обозначают пробелы между словами; вышеприведенный пример никак не связан с таблицей, которую использовал Незнайка):

ЛЪАУЛ ВИУЛМ ГВЯВЛ ЫКЁЪЗ ГПЖЁЪ КЁУГТ ЧЛЫГТ УЗЮАУ ЭТУЁВ
СЧЗГП ЪЁЧРЛ ЪТЮГП МГУКГ ТМВЛЛ УЩТЁБ ГУГТЧ

Затем Незнайке зашифровал получившейся текст еще раз той же таблицей и получил следующий результат:

ЗЮБЪЗ МЧБЗН ХМППМЗ ЮАФЮР ХЪЯФЮ АФБХТ ЭЗЮХТ БРЫББ
ЕТБФМ ГЭРХЪ ШФЭЁЗ ЮТЫХЪ НХБАХ ТНМЗЗ БОТФК ХБХТЭ

Восстановите исходное сообщение.

Ответ: НАКОНЕЦ ОН ВСЕ ЖЕ НАБРАЛСЯ ХРАБРОСТИ НАСТОЛЬКО ЧТО РЕШИЛСЯ ПРИЗНАТЬСЯ В СОБСТВЕННОЙ ТРУСОСТИ (цитата из "Незнайка на Луне").

Решение Итак, что произошло. Незнайка взял некоторое сообщение X и зашифровал его с помощью неизвестной таблицы, получил сообщение Y_1 (первое сообщение, данное в условии). Затем он взял Y_1 и зашифровал его с помощью той же таблицы, получив сообщение Y_2 (второе сообщение, данное в условии). Получаем, что символы Y_1 с помощью таблицы Незнайки переходят в символы сообщения Y_2 . Например, рассмотрим первые символы. Получаем, что буква "Л" с помощью таблицы Незнайки переходит в букву "З". Откуда следует, что в таблице Незнайки под буквой "Л" стоит буква "З". Пройдя по всем символам сообщений мы частично восстановим таблицу Незнайки:

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
Б	К	М	Х			Ф	Я	Р	Ч		А	З	Н			Ъ

Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
Ё	Г	Т	Б				Э		О	Ш		Ю	Е	Ы	П

После этого уже можно попытаться расшифровать сообщение Y_1 , заменяя символы в таблице в обратном порядке (т.е. снизу вверх).

АК _В С Ж_ АБРАЛ СЯ_РА БР_СТ И_АСТ _ЛЪК_ ЧТ_Р_ _ИЛСЯ ПРИЗ_
АТЬСЯ ВС_БС ТВ_ _ТРУ С_СТИ

Далее надо восстанавливать текст и таблицу, учитывая, что исходное сообщение было осмысленным текстом на русском языке. Например, рассмотрим фрагмент " _ИЛСЯ ПРИЗ_ АТЬСЯ". У нас есть кусочек "ИЛСЯ", на который обычно заканчиваются глаголы, значит, после него, скорее всего, начинается новое слово "ПРИЗ_ АТЬСЯ". Надо подставить одну из букв, которую мы еще не знаем как зашифровывать (Д, Е, Й, Н, О, Ф,

Х, Ц, Ш, Ы). Наилучшим образом подходит буква "Н": "ПРИЗНАТЬСЯ". Получается, что в зашифрованном сообщении букве "Н" соответствует буква "Л".

Еще можно рассмотреть последние 8 символов сообщения "ТРУ С_СТИ", перебирая оставшиеся буквы, единственный осмысленный вариант получается, когда подставляется буква "О": "ТРУСОСТИ". Получается, что в зашифрованном сообщении букве "О" соответствует буква "У". Получаем дополненную таблицу, с помощью которой расшифровать еще несколько букв исходного сообщения:

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
Ь	К	М	Х			Ф	Я	Р	Ч		А	З	Н	Л	У	Ъ

Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
Ё	Г	Т	Б				Э		О	Ш		Ю	Е	Ы	П

НАК_Н_ОНВ С_Ж_Н АБРАЛ СЯ_РА БРОСТ ИНАСТ ОЛЬКО ЧТОР__ИЛСЯ ПРИЗНАТЬСЯ ВСОБС ТВ_НН Й_ТРУ СОСТИ.

Продолжив анализировать получающийся исходный текст и добавляя символы в таблицу, получим исходное сообщение: НАКОНЕЦ ОН ВСЕ ЖЕ НАБРАЛСЯ ХРАБРОСТИ НАСТОЛЬКО ЧТО РЕШИЛСЯ ПРИЗНАТЬСЯ В СОБСТВЕННОЙ ТРУСОСТИ (цитата из "Незнайка на Луне").

Задачи для учащихся 5-6 классов (начальная олимпиада)

1. Имеются четыре одинаковых на вид камня, весом 1000 г, 1001 г, 1002 г, 1004 г, а также одночашечные весы со стрелкой, показывающие вес положенного на чашку груза. Как за два взвешивания найти камень весом 1000 г?

Решение. Сначала взвесим любые два камня. Так как все варианты их суммарного веса различны: 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, то по результату можно определить, какие именно два камня мы взяли, т.е. мы знаем, камень весом 1000 г в эту пару или в оставшуюся. Затем взвесим один камень из пары, где есть нужный камень. Либо он, либо второй камень этой пары будет искомым.

2. Какое наименьшее число шахек можно расставить на шахматной доске 8×8 так, чтобы в каждом ее столбце стояло нечетное число шахек, а в каждой строке – четное ненулевое количество шахек? (В каждой клетке может стоять не более одной шахки.) Помните, что необходимо не только привести вариант расстановки, но и объяснить, почему нельзя обойтись меньшим числом шахек.

Решение. Наименьшее ненулевое четное число – это 2. Поэтому в каждой строке должно стоять не менее двух шахек, значит, всего на доске должно стоять не менее 16 шахек. На рисунке показана одна из возможных расстановок.

•	•						
		•	•				
				•	•		
						•	•
						•	•
						•	•
						•	•
						•	•

3. Увлечшись бегом трусцой, Ярослав Борисович подговорил своего друга Игната Михайловича совершать небольшие пробежки по периметру круглого стадиона гимназии № 2022. Во время одной такой пробежки они заметили, что бегают они всегда равномерно и в одном направлении, причем Ярослав Борисович пробегает полный круг на 3 минуты быстрее, чем Игнат Михайлович. Время между их последовательными встречами равно 18 минутам. Определите время, за которое Ярослав Борисович пробегает один круг. Ответ обоснуйте.

Ответ: 6 мин.

Решение. Пусть длина всего стадиона S , Ярослав Борисович преодолевает весь стадион за время t , а значит её скорость S/t . Тогда Игнат Михайлович – за время $t+3$, со скоростью $S/(t+3)$. Составим уравнение, для чего длину пути, пройденного Ярославом Борисовичем до встречи приравняем к длине всей окружности плюс длине пути пройденного более медленным телом:

$$18 \frac{S}{t} = 18 \frac{S}{t+3} + S$$

Откуда $t=6$ мин.

4. Существует ли такое целое число, которое при зачеркивании первой цифры уменьшается в 2022 раза? (Примечание: в условии подразумевается, что после зачеркивания незначащие нули в начале получаемого числа отбрасываются, например, число 100123 превращается в 123).

Ответ: нет.

Решение. Пусть a – первая цифра числа. Представим его в виде $10^k a + b$. Тогда по условию должно быть $10^k a + b = 2022b$, или $10^k a = 2021b$, что невозможно, т.к. a – цифра, а число 2021 делится на 43.

5. В клетках прямоугольной таблицы 4×5 (4 строчки и 5 столбцов) расставлены цифры. Из цифр каждого столбца и из цифр каждой строки составили числа — всего получилось 9 чисел (например, если строка заполнена цифрами следующими цифрами: 1, 8, 3, 4, 2, то могут быть составлены следующие числа: 18342, 13248, 32184 и т.п.). Может ли быть так, что ровно 8 из них делятся на три? Ответ обоснуйте.

Ответ: нет.

Решение. Отметим, что делимость на девять числа, образованного из цифр одной строки, соответствует делимости на девять сумме цифр в этой строке (по признаку делимости на девять). Если ровно 8 таких чисел делятся на 9 — значит есть ровно одна строка или столбец, сумма цифр в которой не делится на девять. Предположим, что это строка (рассуждения в случае столбика аналогичны). Тогда сумма цифр в остальных строках делится на девять, поэтому сумма всех цифр во всех строках не делится на девять. С другой стороны, сумма цифр в каждом столбце делится на девять, поэтому сумма цифр во всех столбцах делится на девять. Получаем противоречие: сумма всех цифр в таблице одновременно делится и не делится на девять.

6. Восстановите числовой пример (одинаковые цифры зашифрованы одинаковыми буквами, а разные – разными):

$$\begin{array}{r}
 \text{Л О С И} \\
 \times \\
 \text{И К С} \\
 \hline
 \text{П А Р И С} \\
 + \text{П О Т О К} \\
 \text{Л О С И} \\
 \hline
 \text{С С С С С С}
 \end{array}$$

Как Вы думаете, найдется ли более одного ответа? Попробуйте ответ обосновать.

Ответ: $5291 \times 189 = 999999$.

Решение. Заметим, что так как $\text{И} * \text{ЛОСИ} = \text{ЛОСИ}$, то $\text{И} = 1$; $\text{К} * \text{ЛОСИ} = \text{ПОТОК}$ значит К не равно 0. Кроме того Л , П не равны 0 и 1, также $\text{Л} + \text{П} > 4$ (минимальное значение $2 + 3 = 5$). Рассмотрим число $\text{СССССС} = \text{С} * 3 * 7 * 11 * 13 * 37$. Значит ИКС можно искать среди

различных комбинаций чисел С, 3, 7, 11, 13 и 37. Рассмотрим возможные варианты с учетом того, что И=1 и минимальное значение С=5.

ИКС: $C*3*7$. При $C=5$ ИКС=105 (не подходит, так как К не равно 0); при $C=6$ ИКС=126; при $C=7$ ИКС=147; при $C=8$ ИКС=168; при $C=9$ ИКС=189.

ИКС: $C*3*11$. При $C=5$ ИКС=165 (подходит для дальнейшего рассмотрения); при $C=6$ ИКС=198, что не подходит так как $C=8=6$. При остальных значениях С число ИКС начинается с 2, что не подходит.

ИКС: $C*3*13=39C=195$ при $C=5$.

ИКС: $3*37=111$ (не подходит так как И. К и С различные числа).

ИКС: $11*13=143$.

ИКС: $C*37$. При $C=5$ ИКС=185. При остальных значениях С число ИКС начинается с 2, что не подходит.

Рассмотрим каждый случай.

ИКС=126. Тогда противоречие в $ЛО61*6=ПАРИС$. В слове ПАРИС И=6, а не 1.

ИКС=147. Тогда противоречие в $ЛО71*7=ПАРИС$. В слове ПАРИС И=9, а не 1.

ИКС=168. Тогда противоречие в $ЛО81*8=ПАРИС$. В слове ПАРИС И=4, а не 1.

ИКС=189. Подходит $5291 \times 189 = 999999$. ЛОСИ= $11*13*37$.

ИКС=195. Тогда ЛОСИ= $7*11*37=2849$ и противоречие в том, что И=9, а не 1.

ИКС=143. Тогда противоречие в $ЛО31*3=ПАРИС$. В слове ПАРИС И=9, а не 1.

ИКС=185. Тогда ЛОСИ= $3*7*11*13=3003$ и противоречие в том, что $O=C=0$.