Решения задач второго тура олимпиады по математике, информатике и криптографии ФПМИ БГУ – 2022

11 класс

1. Имеется три сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди, второй – 10% меди и 90% марганца, третий – 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом новом сплаве?

Ответ: 40%; $43\frac{1}{3}$%**.**

Решение. Пусть для приготовления сплава, содержащего 40% марганца, взяли x *кг* первого сплава, y *кг* второго сплава и z *кг* третьего сплава. При этом получится $(x+y+z)$ *кг* нового сплава, в котором будет $(0.9y+0.6z)$ *кг* марганца. Поэтому

$$0.9y+0.6z=0.4(x+y+z)$$

или

$$4x=5y+2z\,. \qquad (*)$$

В новом сплаве будет $(0.7x+0.1y+0.25z)$ *кг* меди, а в одном килограмме нового сплава меди будет

$$M=\frac{0.7x+0.1y+0.25z}{x+y+z}\ кг\,.$$

Из (*) следует, что

$$x=\frac{5y+2z}{4}$$

и поэтому

$$M=\frac{13y+8z}{30y+20z}\,.$$

Поскольку для приготовления нового сплава можно брать различное число килограммов первого, второго и третьего сплавов, то y и z могут принимать любые неотрицательные значения, причем y и z одновременно не могут равняться нулю. Если $y=0,\ z\neq 0$, то $M=\frac{2}{5}$, если $y\neq 0,\ z=0$, то $M=\frac{13}{30}$. Если же $y\neq 0,\ z\neq 0$, то

$$M=\frac{13+8\frac{z}{y}}{30+20\frac{z}{y}}=\frac{2}{5}+\frac{1}{30+20\frac{z}{y}}\,.$$

Поскольку $\frac{z}{y}>0$, то легко видеть, что в этом случае будут справедливы неравенства

$$\frac{2}{5}<\frac{2}{5}+\frac{1}{30+20\frac{z}{y}}<\frac{2}{5}+\frac{1}{30}=\frac{13}{30}\,.$$

Значит, наименьшее процентное содержание меди может быть равно $\frac{2}{5}\cdot 100\%=40\%$, а наибольшее процентное содержание меди может быть равно $\frac{13}{30}\cdot 100\%=43\frac{1}{3}\%$.

2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений:

$$\begin{cases} \left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}-5\right|-\left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}-7\right|+\left|24\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}+13\right|=11-\sqrt{\sin\frac{\pi(x-2y-1)}{3}}, \\ 2\left(x^2+(y-a)^2\right)-1=2\sqrt{x^2+(y-a)^2-\frac{3}{4}}. \end{cases}$$

Ответ: $a=6l-1,\ a=6l,\ a=6l+2,\ a=6l+3,\ l\in Z$.

Решение. Прежде всего, разберемся с первым уравнением системы. Раскрывая модули на промежутках, имеем:

1) если $\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}\le\frac{5}{12}$, то первое уравнение примет вид

$$24\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}+11=11-\sqrt{\sin\frac{\pi(x-2y-1)}{3}}.$$

Поскольку в этом случае, очевидно, левая часть уравнения не меньше 11, а правая, соответственно, не больше, то равенство возможно лишь в том случае, когда имеет место система

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi y}{2}=0, \\ \sin\frac{\pi(x-2y-1)}{3}=0, \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} y=2k+1, \\ x=3m+4k+3, \end{cases} \quad k,m\in Z. \qquad (1)$$

2) если $\frac{5}{12}<\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}\le\frac{7}{12}$, то левая часть первого уравнения примет вид $48\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}+1$, откуда, учитывая ограничения на корень, получаем, что левая часть первого уравнения никак не меньше, чем $48\cdot\frac{5}{12}+1=21$, а поскольку правая часть по-прежнему не больше 11, то на этом промежутке уравнение корней не имеет.

3) Наконец, если $\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}>\frac{7}{12}$, то левая часть первого уравнения примет вид $24\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}+15$, откуда видно, левая часть больше чем 29. Следовательно, в этом случае первое уравнение также не имеет решений.

Таким образом, все возможные решения первого уравнения задаются формулой 1.

Теперь займемся вторым уравнением исходной системы. Переписав его в виде

$$\left(\sqrt{x^2+(y-a)^2-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2=0,$$

перейдем к эквивалентному представлению: $x^2+(y-a)^2=1$. (2)

Как следует из формулы (1), все возможные решения являются целыми числами. Поэтому для x возможны только три различных значения: 0 и ±1. Рассмотрим эти случаи:

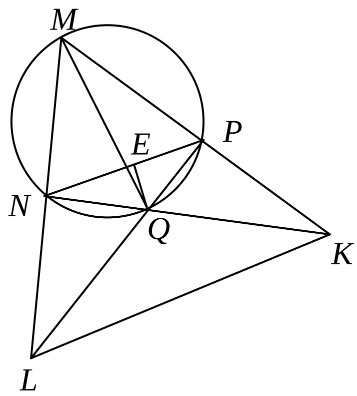
1) $x=0$ или (как это следует из (1)) $4k=-3(m+1)$. Отсюда видим, что k кратно 3, т.е. $k=3l,\ l\in Z$. Тогда $m=-4l-1,\ y=6l+1$. Далее, поскольку из (2) в этом случае следует равенство $y-a=\pm1$, т.е. $a=y\pm1$, то $a=6l$ либо $a=6l+2$.

2) $x=1$, т.е. $4k+3m+2=0$, откуда (показать!) $m=-4l-2,\ k=3l+1,\ y=6l+3,\ l\in Z$. Следовательно, из равенства $y-a=0$ получаем: $a=y=6l+3,\ l\in Z$.

3) $x=-1$, т.е. $4k+3m+4=0$, откуда $m=-4l,\ k=3l-1,\ y=6l-1,\ l\in Z$. Следовательно, из равенства $y-a=0$ получаем: $a=y=6l-1,\ l\in Z$.

3. В треугольнике KLM проведены биссектрисы KN и LP, пересекающиеся в точке Q. Отрезок PN имеет длину 1 и вершина M лежит на окружности, проходящей через точки $P,\ Q$ и N. Найти стороны и углы треугольника PQN.

Ответ: $QN = QP = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \angle QNP = \angle QPN = 30°,\ \angle PQN = 120°$**.**



Решение. Положим $\angle M = \alpha$. Тогда $\angle PQN = 90° + \frac{\alpha}{2}$ (как угол между биссектрисами двух других углов треугольника (показать!)). С другой стороны, поскольку четырехугольник $MNQP$ вписан в окружность, то (сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна $180°$)

$$\angle PQN + \angle PMN = 180°$$

или

$$90° + \frac{\alpha}{2} + \alpha = 180°,$$

откуда

$$\alpha = 60°,\ \angle PQN = 120°.$$

Так как MQ – биссектриса, то $\angle QPN = \angle QNP = 30°$. Следовательно, треугольник PQN равнобедренный. Проведем $QE \perp NP$. Из треугольника QNE имеем:

$$QN = QP = \frac{0.5}{\cos 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

4. Имеется N карточек, на каждой из которых написано натуральное число в двоичной системе счисления. Критерием «похожести» двух карточек будем считать результат операции XOR между соответствующими числами. Операция выполняется побитово, результат описан следующей таблицей («по аналогии с таблицей умножения»)

	0	1
0	0	1
1	1	0

Дайте словесное описание алгоритма (с обоснованием), с помощью которого можно найти пару карточек, для которых результат операции XOR минимален. (Если пар несколько, то нужно найти хотя бы одну такую пару.)

Решение. Необходимо отсортировать (по возрастанию или убыванию) числа, описывающие карточки, и для отыскания минимального значения XOR достаточно выполнить попарные сравнения значений XOR соседних (в отсортированной последовательности) карточек. Более подробно: если есть две карточки с одинаковыми числами, то они и должны быть выбраны, иначе после сортировки смотрим рядом расположенные. Выбираем пару, в которой разряд с различными цифрами в двоичном представлении имеет минимальную степень (расположен как можно ближе к правому краю числа). При наличии нескольких вариантов смотрим следующий несовпадающий разряд.
Примерная разбалловка.

1/3 баллов – рассматриваются все возможные пары.

2 /3 баллов – не все пары, но нет обоснования

Полный балл – сортировка и обоснование.

11 класс – КРИПТОГРАФИЯ

5. Знайка придумал новый шифр. Он записал 32 буквы русского алфавита (Е = Ё) в клетки таблицы 4 на 8. Чтобы зашифровать сообщение, его надо разбить на пары букв слева направо (пробелы и знаки препинания удаляются). Если количество букв в сообщении нечетное, то последняя буква повторяется дважды. Каждая пара букв зашифровывается по отдельности по следующим правилам: если буквы пары находятся в одной строке или одном столбце таблицы, то просто меняется порядок следования букв в паре; иначе, буквы пары соответствуют двум противоположным углам прямоугольника в таблице и при шифровании они заменяются на 2 буквы, соответствующие двум другим вершинам прямоугольника (при этом первой записывается та буква, которая находится в той же строке, что и первая буква исходной пары).

Знайка использовал представленную таблицу (при передаче часть букв в таблице потерялась). Например, слово "КРИПТОНН" будет зашифровано как "РКПИДЛНН". Незнайка получил от Знайки следующее сообщение:

Е	Х	Р	Д	Э	Т	Щ	С
?	Я	Г	П	?	?	?	И
?	Ш	Н	О	?	Л	Ю	?
?	?	К	Ц	?	?	?	?

ЧР ОД ЧЭ ХГ УВ ЯЦ ЛР ГЫ ЫЯ НК ПО ЧО ЬР

Помогите Незнайке расшифровать данное сообщение. (Исходное сообщение является осмысленной фразой на русском языке).

Ответ: "НЕ ДОВЕРЯЙ ШПУНТИКУ И КНОПОЧКЕ ".

Решение. Расшифрование осуществляется по тому же алгоритму, что и зашифрование. Рассмотрим первые 4 пары шифртекста "ЧР ОД ЧЭ ХГ" в зависимости от расположения буквы Ч возможны следующие 13 вариантов расшифрования: "ГЕ ДО ?Е РЯ", "НЕ ДО ?Е РЯ", "КЕ ДО ?Е РЯ", "КХ ДО ?Х РЯ", "ГЭ ДО ЭЧ РЯ", "НЭ ДО ЭЧ РЯ", "КЭ ДО ЭЧ РЯ", "ГТ ДО ?Т РЯ", "КТ ДО ?Т РЯ", "ГЩ ДО ?Щ РЯ", "КЩ ДО ?Щ РЯ", "НС ДО ?С РЯ", "КС ДО ?С РЯ". Поскольку это должно быть началом осмысленного текста на русском языке, то потенциально подходит второй варианты (с натяжкой еще подходит третий вариант). Значит предположительно мы нашли позицию буквы Ч (первый столбец, третья строка). Рассмотрим последние 4 пары в шифртексте, первые три пары расшифровываются однозначно, последней есть 12 вариантов: "КН ОП ОЧ (ГЕ, КЕ, КХ, ГЭ, НЭ, КЭ, ГТ, КТ, ГЩ, КЩ, НС, КС). Перебирая возможные концовки строк, получаем, что единственной подходящей является окончание "КЕ". Откуда находим позицию буквы "Ь". Вернемся к расшифровке первых 4 пар: "НЕ ДО ?Е РЯ". Вместо ? должна стоять одна из букв, которая еще не записана в таблице. В таблице еще не записаны буквы А, Б, В, Ж, З, Й, М, У, Ф, Ъ, Ы. Перебирая эти буквы, получаем, что подходят только буквы В и М. Нам уже известно следующее:

Е	Х	Р	Д	Э	Т	Щ	С
З	Я	Г	П	Б	Ъ	А	И
Ч	Ш	Н	О	В	Л	Ю	Ж
Ь	У	К	Ц	Й	М	Ф	Ы

Е	Х	Р	Д	Э	Т	Щ	С
?	Я	Г	П	?	?	?	И
Ч	Ш	Н	О	В или М	Л	Ю	?
Ь	?	К	Ц	?	?	?	?

Буква Ы не может стоять во второй строке или втором столбце, т.к. иначе последние 5 пар будут расшифровываться, как "ЯЫ КН ОП ОЧ КЕ". "ЯЫ" не могут быть в одном слове русского языка и нет слов, начинающихся на ЫКН...Небольшим перебором и рассмотрением расшифрования пар "ЛР ГЫ ЫЯ", можно показать, что единственное правдоподобное место буквы Ы это позиция в правом нижнем углу таблицы (четвертая строка, восьмой столбец).

Запишем, что нам уже удалось расшифровать:

"НЕ ДО (В,М)Е РЯ ?? П* НТ ИК *И КН ОП ОЧ КЕ" (Если знать персонажей Незнайки, то уже можно расшифровать сообщение). Звездочкой обозначена одна и та же буква в таблице. Перебирая оставшиеся варианты для *, получаем, что подходит только У. Далее простейшим перебором находим подходящий ответ.

Е	Х	Р	Д	Э	Т	Щ	С
?	Я	Г	П	?	?	?	И
Ч	Ш	Н	О	В или М	Л	Ю	?
Ь	*	К	Ц	?	?	?	?

6. Игорь нашел действительные корни x_1, x_2, x_3, x_4 уравнения $x^4+8x^3+18x^2+11x+2 = 0$. Далее для зашифрования одной буквы сообщения, он выполнял 4 шага:
1) находил порядковый номер n зашифровываемой буквы в русском алфавите; 2) выбирал случайным образом один из ранее найденных корней x^* (т.е. $x^* = x_1$, или $x^* = x_2$, или $x^* = x_3$, или $x^* = x_4$); 3) вычислял значение $[f(x^*)]$, где $f(x) = x^6 + 10x^5 + 38x^4 + 79x^3 + 96x^2 + 48x + 15$, а $[x]$ – целая часть числа x (наибольшее целое, не превосходящее x); 4) находил остаток при делении значения $(n + [f(x^*)])$ на 33 и получал порядковый номер буквы – результата зашифрования.
Указанные шаги он повторил для всех букв сообщения и получил следующий зашифрованный текст:

НКМУЩ ЛЗЁФЖ ЫЦУП

Восстановите исходное сообщение.

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	

Ответ: Ждем тебя на ФПМИ!

Решение. Разберемся, что из себя представляет описанное в условии задачи преобразование. Можно пойти сложным путем, найти все 4 действительных корня, после чего подставить их в многочлен $f(x)$ и найти получаемые значения. Однако можно поступить проще. Пусть $g(x) = x^4+8x^3+18x^2+11x+2$. Тогда x_1, x_2, x_3, x_4 – корни $g(x)$ по условию, т.е. $g(x_i) = 0$. Поделим многочлен $f(x)$ на $g(x)$ с остатком, получим, что $f(x) = g(x)\, a(x) + r(x)$, где $r(x)$ –это многочлен степени не выше 3. При этом

$$f(x_i) = g(x_i)\, a(x_i) + r(x_i) = 0\, a(x_i) + r(x_i) = r(x_i).$$

Уже из этого соотношения видно, что легче вычислять $r(x_i)$, чем $f(x_i)$.
Поделив многочлен $f(x)$ на $g(x)$ с остатком, получим:

$$f(x) = (x^4+8x^3+18x^2+11x+2)(x^2 + 2x + 4) + 7, \text{ т.е. } r(x) = 7.$$

Следовательно, для любого корня x_i значение $[f(x_i)] = [r(x_i)] = 7$. Это значит, что при зашифровании к каждому порядковому номеру буквы в алфавите всегда прибавлялось значение 7. Поэтому для расшифрования сообщения достаточно из порядкового номера в алфавите каждой буквы 7 вычесть.