5-6 класс РЕШЕНИЯ

1. Найдите количество нечетных четырёхзначных чисел таких, что все их цифры делятся на 3.

Ответ и Решение. 3×4×4×2=96.
Всего 4 цифры дают число, кратное 3: 0, 3, 6, 9, но первая цифра не может быть равной нулю, а последняя цифра – нечетная, т.е. в конце может стоять только одна их двух цифр: 3 или 9. Отсюда получаем общее число вариантов: 3×4×4×2=96.

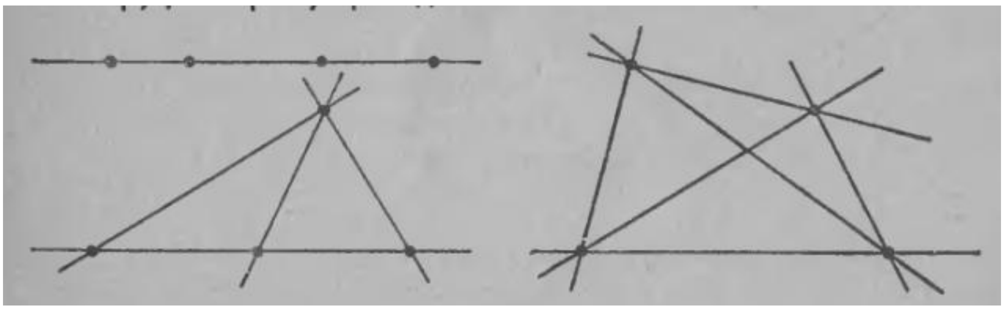
Примечание. Участники, незнакомые с комбинаторикой, пробовали выписывать такие числа и искать закономерность (бывали случаи, когда дети и все числа выписывали).

2. На прямой расставляются 5 положительных целых чисел так, что каждое последующее больше предыдущего, пятое больше первого ровно в три раза, а сумма всех 5 чисел равна 31. Какое число стоит на четвертом месте?

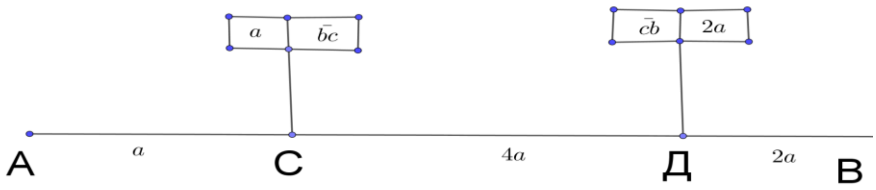
Решение. Заметим, что пятое число делится на 3, значит, это могут быть только числа 3, 6, 9, ..., 30. Если пятое число больше 9, то всего чисел набирается больше 31 (надо оценить снизу сумму чисел, стоящих на 2, 3 и 4 местах). Если меньше 9 — то сумма будет меньше 31 (оцениваем теперь сверху). Значит, пятое число – 9, а первое – 3, на четвертом месте получается обязательно 8 (независимо от конкретного числа, стоящего на 2 и 3 местах).

3. Известно, что через любые две различные точки можно провести прямую. А сколько различных прямых можно провести так, чтобы они соединяли попарно 4 точки на плоскости? Ответ обоснуйте и проиллюстрируйте возможные случаи рисунками.

Решение. 4 точки могут лежать на 1 прямой. Значит, через них пройдет 1 прямая.
3 точки лежат на одной прямой и одна не лежит на этой прямой. Тогда всего будет 4 прямые.
В противном случае через каждую пару точек можно провести прямую, а выбрать различные пары точек из 4 точек можно 6 способами, отсюда получаем 6 различных прямых



4. Мотоциклист едет из пункта А в пункт В по дороге, на которой стоят километровые столбы с табличками. На каждой табличке написаны два числа, показывающие расстояние от этого конкретного столба до пунктов А и В. Проезжая мимо одного из столбов, мотоциклист увидел на них два числа – однозначное и двузначное. Проехав дальше на расстояние, большее, чем предыдущее в 4 раза, он увидел столб, на котором одно из чисел указывало, что ему осталось ехать в 2 раза больше, чем он проехал до первого столба, а второе число было записано теми же цифрами, что и одно из чисел на табличке первого столба, но в обратном порядке. Найдите расстояние от А до В.



Решение. Из условия следует, что расположение табличек на столбах только такое, как показано на рисунке. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} 6a = 10b + c \\ 5a = 10c + b, \end{cases}$$

из которой 50b + 5c = 60c + 6b, 44b = 55c, b = 5, c = 4, a = 9, AB = 63.

5. Царь Тридевятого царства созвал на симпозиум 64 из своих лучших мудрецов. Каждый из них получил сертификат с номером от 1 до 64, соответствующим его степени мудрости: чем мудрее, тем выше номер (у каждого свой номер). Секретарь симпозиума думает, как рассадить всех мудрецов в большом шахматном зале, в котором есть 8 рядов по 8 мест в каждом (нумерация как в шахматах: ряды с **1-го** по **8-й**, места в каждом ряду обозначены подряд слева направо буквами ***a, b, c , d, e, f, g, h***). При этом он старается учесть следующее: мудрец чувствует себя нормально, если он видит среди своих ближайших соседей (т.е. на местах слева, справа, спереди, сзади и по диагоналям – максимум 8 человек) не более одного мудреца с номером выше, чем его номер, иначе он понимает, что ему нужно повышать своё мастерство, и он не чувствует себя совсем нормально.

Какое наибольшее число мудрецов может чувствовать себя нормально, и как секретарь должен их тогда рассадить. (Предложите вариант рассадки и покажите, что большего секретарь добиться не сможет).

Ответ. 32.

Решение. Рассадим сначала первых 32 мудрецов (по номерам) на ряды с нечетными номерами. Затем последующих мудрецов будем рассаживать так: с 33 по 40 на 2-й ряд (подряд с места ***a*** до места ***h***). Затем аналогично мудрецов с 41-го по 48-й на 4-й ряд и т.д.

Все мудрецы, сидящие на четных рядах будут чувствовать себя нормально, а на нечетных нет.

Покажем, что большего добиться нельзя. Разобьем шахматный зал на «непересекающиеся квадратики 2×2» с местами: ***a*1-*a*2-*b*1-*b*2, *a*3-*a*4-*b*3-*b*4** и так далее – всего 16 квадратов. В каждом таком квадратике все мудрецы являются соседями друг другу. В то же время в каждом квадрате будет ровно 2 чувствующих себя нормально мудреца, итого – не более 32 таких мудрецов.

6. Зашли как-то Знайка, Незнайка и Торопыжка в школу. В одном из классов на доске были записаны примеры на сложение столбиком. Пока Знайка и Торопыжка отвлеклись на пару минут, Незнайка заменил в этих примерах все цифры на буквы, причем одинаковые цифры заменил одинаковыми буквами, а разные – разными:

$$\begin{array}{r} ЖИГ \\ ККК \\ ГДЗ \\ ЖБ \\ \hline ДЗАЖ \end{array} \qquad \begin{array}{r} ВГИ \\ ББД \\ ИАА \\ \hline ЖЕЕИ \end{array} \qquad \begin{array}{r} ДВЕ \\ АЗЖ \\ ЗЕВ \\ \hline ДЗАБ \end{array}$$

Однако Знайка, немного подумав, заявил, что может найти сумму всех ответов (т.е. трех чисел, получающихся в результате сложения в этих примерах), причем он уверен, что эта сумма определяется однозначно. Прав ли Знайка, и если «да», то найдите эту сумму. (Приведите с обоснованием все варианты суммы, либо, если сумма определяется однозначно, то из ваших рассуждений это должно быть понятно.)

Ответ. 4995.

Решение. Для решения необходимо заметить, что в записи примеров присутствуют 10 букв, значит задействованы все цифры, причем если проанализировать все 10 слагаемых в этих примерах, то важно заметить, что 9 букв (а значит, и цифр) стоят в этих слагаемых по три раза, причем во всех разрядах (единиц, десятков и сотен) по одному разу, т.е. эти буквы соответствуют ненулевым цифрам. И только буква Е стоит в двух разрядах – единиц и десятков, причем не старшей цифрой, т.е. Е соответствует цифре 0.

Поэтому для вычисления искомой суммы можно воспользоваться тем фактом, что все 9 ненулевых цифр стоят в трех разных разрядах, а значит, сумма будет равна:

$(1 + 10 + 100)\cdot(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 111\times45 = 4995.$