

Олимпиада ФПМИ-2022

7-8 классы

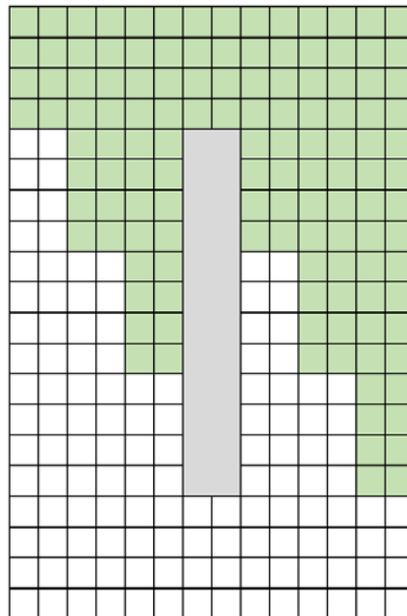
Решения

1. Можно ли из цифр 1, 4, 6 и 9 составить два числа, одно из которых ровно в 2022 раза больше другого? (каждую цифру можно использовать сколько угодно раз)

Решение. Пусть искомые числа равны x и y . Тогда $x=2022y$. Проанализируем последние цифры чисел x и y : при умножении 1, 4, 6 или 9 на 2 получается соответственно 2, 8, 2 или 8, что невозможно по условию.

2. Имеется клетчатый прямоугольник 20×14 , у которого вырезан центральный прямоугольник 12×2 (см. рис.). Незнайка утверждает, что сможет разрезать данную фигуру на две равные части, а потом из них сложить квадрат. Прав ли Незнайка?

Решение. Незнайка прав. Искомое разрезание представлено на рисунке.



3. (7 класс) В парке вдоль дорожки длиной 1280 м стоит несколько скамеек (больше одной). Математик Борис идет со скоростью 80 м/мин. На каждой скамейке он останавливается и отдыхает одно и то же целое число минут. Другой математик Леонид едет на электросамокате по той же дорожке со скоростью 256 м/мин и на каждой скамейке отдыхает в два раза дольше Бориса. Оба математика начали и закончили движение по дорожке одновременно. Сколько скамеек стоит вдоль дорожки?

Ответ: 11 скамеек.

Решение. Борис прошел дорожку за 16 минут, а Леонид проехал за 5 мин. Таким образом, Леонид отдыхал на 11 минут больше, чем Борис, и одновременно в два раза больше, чем Борис. Откуда следует, что Борис отдыхал ровно 11 минут. Так как на каждой скамейке он останавливался на целое и одинаковое число минут, то 11 делится на число скамеек нацело. Поэтому вдоль дорожки стоит 11 скамеек.

(8 класс) Пусть a – корень уравнения $x^2+px+q=0$, а b – корень уравнения $x^2-px-q=0$, где p и q – действительные числа, причем q не равно нулю. Докажите, что уравнение $x^2+2px+2q=0$ имеет действительный корень, заключенный между a и b .

Решение. Из условия следует, что числа a и b удовлетворяют соотношениям: $a^2+pa+q=0$ и $b^2-pb-q=0$, причем поскольку $q \neq 0$, то и a и b тоже не равны 0. Рассмотрим значения квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + 2px + 2q$ в точках a и b . Имеем

$$f(a) = a^2 + 2pa + 2q = 2(a^2 + pa + q) - a^2 = -a^2 < 0,$$
$$f(b) = b^2 + 2pb + 2q = 3b^2 - 2(b^2 - pb - q) = 3b^2 > 0.$$

Таким образом, квадратный трехчлен $f(x)$ в точках a и b принимает значения разных знаков, а значит соответствующая ему парабола $y=x^2+2px+2q$ пересекает ось абсцисс в точке, заключенной между a и b .

4. Существует ли выпуклый шестиугольник, в котором угол между любыми двумя диагоналями больше 20° (не меньше 21°)? (Углом между диагоналями назовем меньший угол при пересечении прямых, которые содержат эти диагонали. Если прямые параллельны, то считаем, что угол между ними – 0° .)

Ответ: не существует.

Решение. В шестиугольнике 9 диагоналей. Отметим на плоскости точку O и проведем через нее прямые, параллельные диагоналям. 9 прямых разделят плоскость на 18 секторов т.е. угол в 360° на 18 углов, а значит они все не могут быть больше 20° .

5. Царь Тридевятого царства созвал на симпозиум 64 из своих лучших мудрецов. Каждый из них получил медальон с номером от 1 до 64, соответствующим его степени мудрости: чем мудрее, тем выше номер (все медальоны имеют различные номера). Мудрецы расселись в зале, который состоит из 8 рядов по 8 мест в каждом. При этом выяснилось, что мудрец находится в зоне

комфорта, если среди его ближайших соседей (т.е. на местах слева, справа, спереди, сзади и по диагоналям – максимум 8 человек) окажется не более одного мудреца с номером выше, чем его номер. В противном случае мудрец понимает, что ему необходимо повышать квалификацию, и поэтому выходит из зоны комфорта.

Какое наибольшее число мудрецов может находиться в зоне комфорта в указанном зале?

Ответ: 32.

Решение. Занумеруем места в зале аналогично нумерации клеток на шахматной доске: ряды с **1-го** по **8-й**, места в каждом ряду обозначены подряд слева направо буквами **a, b, c, d, e, f, g, h**). Рассадим сначала первых 32 мудрецов (по номерам) на ряды с нечетными номерами. Затем последующих мудрецов будем рассаживать так: с 33 по 40 на 2-й ряд (поряд с места **a** до места **h**). Затем аналогично мудрецов с 41-го по 48-й на 4-й ряд и т.д. Заметим, что все мудрецы, сидящие на четных рядах, будут находиться в зоне комфорта, а на нечетных нет.

Покажем, что большего добиться нельзя. Разобьем шахматный зал на «непересекающиеся квадратики 2×2» с местами: **a1-a2-b1-b2, a3-a4-b3-b4** и так далее – всего 16 квадратов. В каждом таком квадратике все мудрецы являются соседями друг другу. В то же время в каждом квадрате будет ровно не более двух чувствующих себя комфортно мудрецов, итого – не более 32 таких мудрецов.

- 6. (Криптография)** Знайка придумал новый шифр. Он записал 32 буквы русского алфавита (Е = Ё) в клетки таблицы 4 на 8. Чтобы зашифровать сообщение, его надо разбить на пары букв слева направо (пробелы и знаки препинания удаляются). Если количество букв в сообщении нечетное, то последняя буква повторяется дважды. Каждая пара букв зашифровывается по отдельности по следующим правилам: если буквы пары находятся в одной строке или одном столбце таблицы, то просто меняется порядок следования букв в паре; иначе, буквы пары соответствуют двум противоположным углам прямоугольника в таблице и при шифровании они заменяются на 2 буквы, соответствующие двум другим вершинам прямоугольника (при этом первой записывается та буква, которая находится в той же строке, что и первая буква исходной пары).

Знайка использовал представленную таблицу (при передаче часть букв в таблице потерялась). Например, слово "КРИПТОНН" будет зашифровано как "РКПИРЙНН". Незнайка получил от Знайки следующее сообщение:

Ж	?	Д	Э	Н	Л	?	Ю
К	З	Ш	Щ	?	Х	Ы	Я
О	И	У	?	П	С	М	Й
Р	Ч	?	Ц	Ъ	В	?	Т

ЕП ЕЧ КП ЕН ИН ЧЖ УП АТ ЙЙ

Помогите Незнайке расшифровать данное сообщение. (Исходное сообщение является осмысленной фразой на русском языке).

Ответ: "НИЧЕГО НЕ ПЕРЕПУТАЙ".

Решение. Расшифрование осуществляется по тому же алгоритму, что и зашифрование. В таблице отсутствуют буквы Е, Ё, Б, А, Г, Ф. Всего существует 6! вариантов расставить эти буквы в указанную таблицу. Сократим перебор. Посмотрим на первую пару зашифрованных букв "ЕП", в зависимости от расположения буквы Е возможны 6 вариантов расшифрования: "НИ", "НМ", "ПЕ", "ПЕ", "БУ", "БМ". Т.к. исходное сообщение - осмысленное сообщение на русском языке, то возможны только 3 варианта "НИ" и "ПЕ" (при двух разных расположениях Е). Посмотрим на вторую пару "ЕЧ", при оставшихся вариантах на расположение Е можем получить следующие 3 варианта расшифрования: "ЧЕ", "ЪЗ", "ИЦ". Слов, начинающихся на "ПЕЪЗ" и на "ПЕИЦ" в русском языке не существует, поэтому остается только один вариант: "НИЧЕ", при этом буква "Е" стоит в верхнем левом углу. Продолжая таким же образом расшифровывать сообщение и восстанавливая таблицу найдем искомое сообщение.