### **5-6** класс

14 мая 2022

- 1. Время выполнения работы 3,5 часа (210 мин.).
- 2. Пользоваться калькулятором не разрешается.
- 3. Обращаем Ваше внимание, что итоги олимпиады подводятся как в целом по направлению (Математикаинформатика), так и в номинации «Криптография». Основными критериями при подведении итогов по криптографии являются правильность решения задачи № 6 и достаточно успешное выполнение остальных заданий (степень успешности выполнения будет определяться решением жюри).
- 4. Завтра 15 мая 2022 г. в 9.00 в ауд. 607 главного корпуса БГУ (для участников в г. Витебске аудитория будет сообщена дополнительно) состоится разбор решений задач заключительного тура олимпиады ФПМИ, после которого можно будет посмотреть свои работы.
- 5. **Закрытие олимпиады** сразу после завершения разбора решений, просмотра работ и печати дипломов в той же **аудитории 607 главного корпуса** БГУ (предположительно не позднее 13.00).
- 1. Найдите количество нечетных четырёхзначных чисел таких, что все их цифры делятся на 3.
- **2.** На прямой последовательно расставлены пять *положительных целых* чисел так, что каждое последующее больше предыдущего, пятое больше первого ровно в три раза, а сумма всех пяти чисел равна 31. Какое число стоит на четвертом месте?
- **3.** Известно, что через любые две различные точки можно провести прямую. А сколько различных прямых можно провести так, чтобы они соединяли попарно 4 точки на плоскости? Ответ обоснуйте и проиллюстрируйте возможные случаи рисунками.
- **4.** Мотоциклист едет из пункта A в пункт B по дороге, на которой стоят километровые столбы с табличками. На каждой табличке написаны два числа, показывающие расстояние от этого конкретного столба до пунктов A и B. Проезжая мимо одного из столбов, мотоциклист увидел на них два числа однозначное и двузначное. Проехав дальше на расстояние, большее, чем предыдущее в 4 раза, он увидел столб, на котором одно из чисел указывало, что ему осталось ехать в 2 раза больше, чем он проехал до первого столба, а второе число было записано теми же цифрами, что и одно из чисел на табличке первого столба, но в обратном порядке. Найдите расстояние от A до B.
- 5. Царь Тридевятого царства созвал на симпозиум 64 из своих лучших мудрецов. Каждый из них получил сертификат с номером от 1 до 64, соответствующим его степени мудрости: чем мудрее, тем выше номер (у каждого свой номер). Секретарь симпозиума думает, как рассадить всех мудрецов в большом шахматном зале, в котором есть 8 рядов по 8 мест в каждом (нумерация как в шахматах: ряды с 1-го по 8-й, места в каждом ряду обозначены подряд слева направо буквами *a, b, c, d, e, f, g, h*). При этом он старается учесть следующее: мудрец чувствует себя нормально, если он видит среди своих ближайших соседей (т.е. на местах слева, справа, спереди, сзади и по диагоналям максимум 8 человек) не более одного мудреца с номером выше, чем его номер, иначе он понимает, что ему нужно повышать своё мастерство, и он не чувствует себя совсем нормально.

Какое наибольшее число мудрецов может чувствовать себя нормально, и как секретарь должен их тогда рассадить. (Предложите вариант рассадки и покажите, что большего секретарь добиться не сможет).

**6.** Зашли как-то Знайка, Незнайка и Торопыжка в школу. В одном из классов на доске были записаны примеры на сложение столбиком. Пока Знайка и Торопыжка отвлеклись на пару минут, Незнайка заменил в этих примерах все цифры на буквы, причем одинаковые цифры заменил одинаковыми буквами, а разные – разными:

ЖИГ		
ККК	ВГИ	ДВЕ
ГДЗ	ББД	ЖЕА
ЖБ	ИАА	3EB
ДЗАЖ	ЖЕЕИ	ДЗАБ

Однако Знайка, немного подумав, заявил, что может найти сумму всех ответов (т.е. трех чисел, получающихся в результате сложения в этих примерах), причем он уверен, что эта сумма определяется однозначно. Прав ли Знайка, и если «да», то найдите эту сумму. (Приведите с обоснованием все варианты суммы, либо, если сумма определяется однозначно, то из ваших рассуждений это должно быть понятно.)

## 7 класс

- 1. Время выполнения работы 3,5 часа (210 мин.).
- 2. Пользоваться калькулятором не разрешается!
- 3. Обращаем Ваше внимание, что итоги олимпиады подводятся как в целом по направлению (Математика-информатика), так и в номинации «Криптография». Основными критериями при подведении итогов по криптографии являются правильность решения задачи № 6 и достаточно успешное выполнение остальных заданий (степень успешности выполнения будет определяться решением жюри).
- 4. Завтра 15 мая 2022 г. в 9.00 в ауд. 605 главного корпуса БГУ (для участников в г. Витебске аудитория будет сообщена дополнительно) состоится разбор решений задач заключительного тура олимпиады ФПМИ, после которого можно будет посмотреть свои работы.
- 5. Закрытие олимпиады сразу после завершения разбора решений, просмотра работ и печати дипломов в той же аудитории 605 главного корпуса (предположительно не позднее 13.00).
- **1.** Можно ли из цифр 1, 4, 6 и 9 составить два числа, одно из которых ровно в 2022 раза больше другого? (Каждую цифру можно использовать сколько угодно раз)
- **2.** Имеется клетчатый прямоугольник 20×14, у которого вырезан центральный прямоугольник 12×2 (см. рис.). Незнайка утверждает, что сможет разрезать данную фигуру на две равные части, а потом из них сложить квадрат (разрезы проводить по линиям сетки). Прав ли Незнайка?
- части, а потом из них сложить квадрат (разрезы проводить по линиям сетки). Прав ли Незнайка?

  3. В парке вдоль дорожки длиной 1280 м стоит несколько скамеек (больше одной). Математик Борис идет со скоростью 80 м/мин. На каждой скамейке он останавливается и отдыхает одно и то
  - же целое число минут. Другой математик Леонид едет на электросамокате по той же дорожке со скоростью 256 м/мин и на каждой скамейке отдыхает в два раза дольше Бориса. Оба математика начали и закончили движение по дорожке одновременно. Сколько скамеек стоит вдоль дорожки?
- **4.** Существует ли выпуклый шестиугольник, в котором угол между любыми двумя диагоналями больше 20°? (Углом между диагоналями назовем меньший из углов при пересечении прямых, которые содержат эти диагонали. Если прямые параллельны, то считаем, что угол между ними равен 0°.)
- **5.** Царь Тридевятого царства созвал на симпозиум 64 из своих лучших мудрецов. Каждый из них получил медальон с номером от 1 до 64, соответствующим его степени мудрости: чем мудрее, тем выше номер (все медальоны имеют различные номера). Мудрецы расселись в зале, который состоит из 8 рядов по 8 мест в каждом. При этом выяснилось, что мудрец

находится *в зоне комфорта*, если среди его ближайших соседей (т.е. на местах слева, справа, спереди, сзади и по диагоналям – максимум 8 человек) окажется не более одного мудреца с номером выше, чем его номер. В противном случае мудрец понимает, что ему необходимо повышать квалификацию, и поэтому его место не находится в зоне комфорта.

Какое наибольшее число мудрецов может находиться в зоне комфорта в указанном зале?

**6.** Знайка придумал новый шифр. Он записал 32 буквы русского алфавита (E = Ë) в клетки таблицы 4 на 8. Чтобы зашифровать сообщение, его надо разбить на пары букв слева направо (пробелы и знаки препинания удаляются). Если количество букв в сообщении нечетное, то последняя буква повторяется дважды. Каждая пара букв зашифровывается по отдельности по следующим правилам: если буквы пары находятся в одной строке или одном столбце таблицы, то просто меняется порядок следования букв в паре; иначе, буквы пары соответствуют двум противоположным углам прямоугольника в таблице и

при шифровании они заменяются на 2 буквы, соответствующие двум другим вершинам прямоугольника (при этом первой записывается та буква, которая находится в той же строке, что и первая буква исходной пары).

Ж	?	Д	Э	Н	Л	?	Ю
К	3	Ш	Щ	?	X	Ы	R
О	И	У	?	П	С	M	Й
P	Ч	?	Ц	Ъ	В	?	T

Знайка использовал представленную таблицу (при передаче часть букв в таблице потерялась). Например, слово "КРИПТОНН" будет зашифровано как "РКПИРЙНН". Незнайка получил от Знайки следующее сообщение:

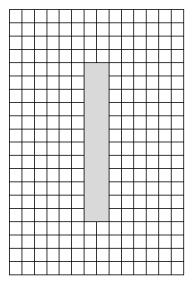
#### ЕП ЕЧ КП ЕН ИН ЧЖ УП АТ ЙЙ

Помогите Незнайке расшифровать данное сообщение. (Исходное сообщение является осмысленной фразой на русском языке).

Желаем успеха!

# 8 класс

- 1. Время выполнения работы 4 часа (240 мин.).
- 2. Пользоваться калькулятором не разрешается!
- 3. Обращаем Ваше внимание, что итоги олимпиады подводятся как в целом по направлению (Математика-информатика), так и в номинации «Криптография». Основными критериями при подведении итогов по криптографии являются правильность решения задачи № 6 и достаточно успешное выполнение остальных заданий (степень успешности выполнения будет определяться решением жюри).
- 4. Завтра—15 мая 2022 г. в 9.00 в ауд. 605 главного корпуса БГУ (для участников в г. Витебске аудитория будет сообщена дополнительно) состоится разбор решений задач заключительного тура олимпиады ФПМИ, после которого можно будет посмотреть свои работы.
- 5. Закрытие олимпиады сразу после завершения разбора решений, просмотра работ и печати дипломов в той же аудитории 605 главного корпуса (предположительно не позднее 13.00).
- **1.** Можно ли из цифр 1, 4, 6 и 9 составить два числа, одно из которых ровно в 2022 раза больше другого? (Каждую цифру можно использовать сколько угодно раз)
- 2. Имеется клетчатый прямоугольник 20×14, у которого вырезан центральный прямоугольник 12×2 (см. рис.). Незнайка утверждает, что сможет разрезать данную фигуру на две равные части, а потом из них сложить квадрат (разрезы проводить по линиям сетки). Прав ли Незнайка?



- **3.** Пусть a корень уравнения  $x^2+px+q=0$ , а b корень уравнения  $x^2-px-q=0$ , где p и q действительные числа, причем q не равно нулю. Докажите, что уравнение  $x^2+2px+2q=0$  имеет действительный корень, заключенный между a и b.
- **4.** Существует ли выпуклый шестиугольник, в котором угол между любыми двумя диагоналями не меньше 21°? (Углом между диагоналями назовем меньший угол при пересечении прямых, которые содержат эти диагонали. Если прямые параллельны, то считаем, что угол между ними равен 0°.)
- **5.** Царь Тридевятого царства созвал на симпозиум 64 из своих лучших мудрецов. Каждый из них получил медальон с номером от 1 до 64, соответствующим его степени мудрости: чем мудрее, тем выше номер (все медальоны имеют различные номера). Мудрецы расселись в зале, который состоит из 8 рядов по 8 мест в каждом. При этом выяснилось, что мудрец находится в зоне комфорта, если среди

его ближайших соседей (т.е. на местах слева, справа, спереди, сзади и по диагоналям — максимум 8 человек) окажется не более одного мудреца с номером выше, чем его номер. В противном случае мудрец понимает, что ему необходимо повышать квалификацию, и поэтому его место не находится в зоне комфорта.

Какое наибольшее число мудрецов может находиться в зоне комфорта в указанном зале?

**6.** Знайка придумал новый шифр. Он записал 32 буквы русского алфавита (E = Ë) в клетки таблицы 4 на 8. Чтобы зашифровать сообщение, его надо разбить на пары букв слева направо (пробелы и знаки препинания удаляются). Если количество букв в сообщении нечетное, то последняя буква повторяется дважды. Каждая пара букв зашифровывается по отдельности по следующим правилам: если буквы пары находятся в одной строке или одном столбце таблицы, то просто меняется

порядок следования букв в паре; иначе, буквы соответствуют противоположным пары двум таблице углам прямоугольника при шифровании заменяются буквы, они на соответствующие двум другим вершинам прямоугольника (при этом первой записывается та

Ж	(	?	Д	Э	Н	Л	?	Ю
К		3	Ш	Щ	?	X	Ы	R
О	)	И	У	?	Π	С	M	Й
P		Ч	?	Ц	Ъ	В	?	Т

буква, которая находится в той же строке, что и первая буква исходной пары).

Знайка использовал представленную таблицу (при передаче часть букв в таблице потерялась). Например, слово "КРИПТОНН" будет зашифровано как "РКПИРЙНН". Незнайка получил от Знайки следующее сообщение:

### ЕП ЕЧ КП ЕН ИН ЧЖ УП АТ ЙЙ

Помогите Незнайке расшифровать данное сообщение. (Исходное сообщение является осмысленной фразой на русском языке).

Желаем успеха!

14 мая 2022

### 9-10 классы

- 1. Время выполнения работы 4 часа (240 мин.).
- 2. Пользоваться калькулятором не разрешается.
- 3. Обращаем Ваше внимание, что итоги олимпиады подводятся как в целом по направлению (Математикаинформатика), так и в номинации «Криптография». Основными критериями при подведении итогов по криптографии являются правильность решения задачи № 6 и достаточно успешное выполнение остальных заданий (степень успешности выполнения будет определяться решением жюри).
- 4. Завтра—15 мая 2022 г. в 9.00 в ауд. 522 главного корпуса БГУ (для участников в г. Витебске аудитория будет сообщена дополнительно) состоится разбор решений задач заключительного тура олимпиады ФПМИ, после которого можно будет посмотреть свои работы.
- 5. Закрытие олимпиады сразу после завершения разбора решений, просмотра работ и печати дипломов в той же аудитории 522 главного корпуса (предположительно не позднее 13.00).
  - 1. Известно, что для чисел a, b и c выполняются равенства:  $a^3 b^3 c^3 = 3abc$  и  $a^2 = 2(b+c)$ . Найдите число a.
  - 2. Найдите все многочлены P(x), для которых верно тождество

$$(x-1)P(x+1) \equiv (x+2)(P(x)-2022)$$

- 3. Определим на множестве натуральных чисел функцию f(n) равную количеству пар натуральных чисел a < b так, что HOK(a,b) = n. Например, f(4) = 2, f(6) = 4.
  - а) Найдите все двузначные n такие, что f(n)=5.
  - b) Сколько существует трехзначных чисел, таких что f(n)=12?
- 4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ . На отрезках  $A_1C_1$ ,  $C_1B_1$  взяты соответственно точки M и N так, что  $\angle MAA_1 = \angle NAC$ . Найти  $\angle AMN$ , если  $\angle AMC_1 = \alpha$ .
- 5. Знайка придумал новый шифр. Он записал 32 буквы русского алфавита (E = Ë) в клетки таблицы 4 на 8. Чтобы зашифровать сообщение, его надо разбить на пары букв слева направо (пробелы и знаки препинания удаляются). Если количество букв в сообщении нечетное, то последняя буква повторяется дважды. Каждая пара букв зашифровывается по отдельности по следующим правилам: если буквы пары находятся в одной строке или одном столбце таблицы, то просто меняется порядок следования букв в паре; иначе, буквы пары соответствуют двум противоположным углам прямоугольника в таблице и при шифровании они заменяются на 2 буквы, соответствующие двум другим вершинам прямоугольника (при этом первой записывается та буква, которая находится в той же строке, что и первая буква исходной пары).

Знайка использовал представленную таблицу (при передаче часть букв в таблице потерялась). Например, слово "КРИПТОНН" будет зашифровано как "РКПИДЛНН". Незнайка получил от Знайки следующее сообщение:

Е	X	P	Д	Э	T	Щ	С
?	R	Γ	Π	?	?	?	И
?	Ш	Н	О	?	Л	Ю	?
?	?	К	Ц	?	?	?	?

#### ЧР ОД ЧЭ ХГ УВ ЯЦ ЛР ГЫ ЫЯ НК ПО ЧО ЬР

Помогите Незнайке расшифровать данное сообщение. (Исходное сообщение является осмысленной фразой на русском языке).

6. В известном шифре RSA используется 2 ключа: e — открытый ключ для шифрования сообщений (зашифровывать сообщения может любой желающий) и d — закрытый ключ для расшифрования сообщений (расшифровывать может лишь тот, кто знает закрытый ключ). Ключи выбираются следующим образом: сначала выбираются два простых различных числа p и q, затем выбирается целое число e из промежутка от 1 до m (m = (p-1)(q-1)) так, что HOД(e, m) = 1, Наконец, число d выбирается как решение уравнения:  $de \equiv 1 \pmod{m}$ . Запись  $a \equiv b \pmod{m}$  означает, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на m.

Игорь выбрал 2 простых числа p и q меньших 50. Перебрав все возможные значения для числа e и найдя соответствующие d, оказалось что ровно в 32 случаях числа e и d совпали. Найдите все возможные значения p и q, при которых такое могло произойти.

Желаем успеха!

14 мая 2022

## 11 класс

- 1. Время выполнения работы 4 часа (240 мин.).
- 2. Пользоваться калькулятором не разрешается.
- 3. Обращаем Ваше внимание, что итоги олимпиады подводятся как в целом по направлению (Математика-информатика), так и в номинации «Криптография». Основными критериями при подведении итогов по криптографии являются правильность решения задач № 5 и № 6 и достаточно успешное выполнение остальных заданий (степень успешности выполнения будет определяться решением жюри).
- 4. Завтра 15 мая 2022 г. в 9.00 в ауд. 517 главного корпуса БГУ состоится разбор решений задач заключительного тура олимпиады ФПМИ, после которого можно будет посмотреть свои работы.
- 5. Закрытие олимпиады сразу после завершения разбора решений, просмотра работ и печати дипломов в той же аудитории 517 главного корпуса (предположительно не позднее 13.00).
- 1. Имеется три сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди, второй 10% меди и 90% марганца, третий 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом новом сплаве?
- 2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений:

$$\begin{cases} \left| 12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}} - 5 \right| - \left| 12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}} - 7 \right| + \left| 24\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}} + 13 \right| = 11 - \sqrt{\sin\frac{\pi(x - 2y - 1)}{3}}, \\ 2\left(x^2 + (y - a)^2\right) - 1 = 2\sqrt{x^2 + (y - a)^2 - \frac{3}{4}}. \end{cases}$$

- 3. В треугольнике *КLM* проведены биссектрисы *KN* и *LP*, пересекающиеся в точке Q. Отрезок *PN* имеет длину 1 и вершина M лежит на окружности, проходящей через точки P, Q и N. Найти стороны и углы треугольника PQN.
- 4. Имеется *N* карточек, на каждой из которых написано натуральное число в двоичной системе счисления. Критерием «похожести» двух карточек будем считать результат операции XOR между соответствующими числами. Операция выполняется побитово, результат описан таблицей (по аналогии с таблицей умножения):

	0	1
0	0	1
1	1	0

Дайте словесное описание алгоритма (с обоснованием), с помощью которого можно найти пару карточек, для которых результат операции XOR минимален. (Если пар несколько, то нужно найти хотя бы одну такую пару.)

5. Знайка придумал новый шифр. Он записал 32 буквы русского алфавита (E = Ë) в клетки таблицы 4 на 8. Чтобы зашифровать сообщение, его надо разбить на пары букв слева направо (пробелы и знаки препинания удаляются). Если количество букв в сообщении нечетное, то последняя буква повторяется дважды. Каждая пара букв зашифровывается по отдельности по следующим правилам: если буквы пары находятся в одной строке или одном столбце таблицы, то просто меняется порядок следования букв в паре; иначе, буквы пары соответствуют двум противоположным углам прямо-угольника в таблице и при шифровании они заменяются на 2 буквы, соответствующие двум другим вершинам прямоугольника (при этом первой записывается та буква,

которая находится в той же строке, что и первая буква исходной пары).

Знайка использовал представленную таблицу (при передаче часть букв в таблице потерялась). Например, слово "КРИПТОНН" будет зашифровано как "РКПИДЛНН".

Е	X	P	Д	Э	T	Щ	C
?	Я	Γ	П	?	?	?	И
?	Ш	Н	О	?	Л	Ю	?
?	?	К	Ц	?	?	?	?

Незнайка получил от Знайки следующее сообщение:

#### ЧР ОД ЧЭ ХГ УВ ЯЦ ЛР ГЫ ЫЯ НК ПО ЧО ЬР

Помогите Незнайке расшифровать данное сообщение. (Исходное сообщение является осмысленной фразой на русском языке.)

- 6. Игорь нашел действительные корни  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  уравнения  $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 11x + 2 = 0$ . Далее для зашифрования одной буквы сообщения, он выполнял 4 шага:
  - 1) находил порядковый номер n зашифровываемой буквы в русском алфавите (см. таблицу ниже);
  - 2) выбирал случайным образом один из ранее найденных корней  $x^*$  (т.е.  $x^* = x_1$ , или  $x^* = x_2$ , или  $x^* = x_3$ , или  $x^* = x_4$ );
  - 3) вычислял значение [ $f(x^*)$ ], где  $f(x) = x^6 + 10x^5 + 38x^4 + 79x^3 + 96x^2 + 48x + 15$ , а [x] целая часть числа x (наибольшее целое, не превосходящее x);
  - 4) находил остаток при делении значения  $(n + [f(x^*)])$  на 33 и получал порядковый номер буквы результата зашифрования.

Указанные шаги он повторил для всех букв сообщения и получил следующий зашифрованный текст:

# нкмущ лзёфж ыцуп

Восстановите исходное сообщение.

A	Б	В	Γ	Д	Е	Ë	Ж	3	И	Й	К	Л	M	Н	О	Π
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P	С	T	У	Φ	X	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	
									'							