

Заключительный тур

29 апреля 2023

5-6 классы

1. *Время выполнения работы 3,5 часа (210 мин.).*
2. *Пользоваться калькулятором не разрешается.*
3. *Завтра – 30 апреля 2022 г. в 9.00 в ауд. 607 главного корпуса БГУ (для участников в г. Витебске аудитория будет сообщена дополнительно) состоится разбор решений задач заключительного тура олимпиады ФПМИ, после которого можно будет посмотреть свои работы.*
4. *Заккрытие олимпиады сразу после завершения разбора решений, просмотра работ и печати дипломов в той же аудитории 607 главного корпуса (предположительно не позднее 13.00).*

1. Числа 300 и 270 разделили на одно и то же число. В первом случае в остатке получили 12, а во втором 54. На какое число делили? (Укажите все возможности и покажите, что других нет.)
2. Сколько из трехзначных чисел, которые можно составить из всех цифр 1, 3 и 5, являются простыми? (Простым называется натуральное число, которое делится только на единицу и на себя, например: 2, 3, 5, 7 и т. д.)
3. Когда автомобиль проехал часть пути из пункта А в пункт В, то оказалось, что он проехал столько километров, сколько минут ему придется ехать оставшуюся часть. Но когда он проехал и эту часть пути, то оказалось, что её длина составляет столько километров, сколько минут он затратил на первую часть пути. Сколько километров проезжает автомобиль за один час? (*Скорость автомобиля постоянна на всем пути.*)
4. В лагере «Бригантина» проводилась смешанная эстафета 5×200м (в команде 3 мальчика и две девочки) на прямом участке АВ длиной 1000 м. Передача эстафетной палочки происходит в пунктах С, D, E, F таких, что $AC = CD = DE = EF = FB = 200$ м. Для удобства наблюдения за эстафетой судейскую вышку решили расположить в некоторой точке беговой дорожки так, чтобы суммарное расстояние от нее до всех точек А, В, С, D, E и F было наименьшим. В каком месте может располагаться судейская вышка? (Укажите множество всех точек на дорожке АВ, удовлетворяющих данному условию; ответ объясните.)
5. На доске написаны числа 22 и 23. Каждую минуту Миша перемножает два самых больших числа, из имеющихся в данный момент на доске, прибавляет к ним 1 и записывает новое получившееся число на доску. Докажите, что
 - А) Миша никогда не запишет число, делящееся на 4;
 - Б) Могут ли среди записываемых чисел получиться такие, которые равнялись бы квадратам натуральных чисел?
6. Расшифруйте следующее числовое равенство (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а различным буквам – различные цифры):

$$\overline{aa} \cdot \overline{ac} = \overline{acc} + \overline{ac}.$$

Желаем успеха !

Заключительный тур

29 апреля 2023

7 класс

- *Время выполнения работы 4 часа (240 мин.).*
- *Пользоваться калькулятором не разрешается!*
- *Разбор решений задач заключительного тура олимпиады состоится 30 апреля 2023 г. в 10:00 в ауд. 605 главного корпуса БГУ (для участников в г. Витебске аудитория будет сообщена дополнительно), после чего можно будет посмотреть свои работы.*
- *Закрытие олимпиады и награждение победителей состоится сразу после завершения разбора решений, просмотра работ и печати дипломов в той же аудитории 605 главного корпуса (предположительно в 13:00-13:30).*

1. Существует ли на клетчатой плоскости *сплошная* (без «дырок») фигура F , для которой *одновременно* выполняются следующие условия:

- а) F можно без остатка разрезать на фигурки-«крестики», состоящие из пяти клеток;
- б) F можно без остатка разрезать на фигурки в виде буквы «Т», состоящие из четырех клеток.

(Фигурки можно поворачивать, в каждом разрезании используются фигурки только одного вида, резать можно только по границам клеток.)

2. Во время международного шахматного турнира в Новых Васюках была изобретена фигура под названием «хромой» ферзь, которая ходит на одну или две клетки в одном из трех направлений: «вправо» по горизонтали или «вверх» по вертикали, или «вправо-вверх» по диагонали.

На шахматной доске, в некоторой клетке стоит «хромой» ферзь, которого Вася и Петя по очереди двигают по описанным выше правилам (начинает Вася). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Сколько на доске имеется начальных положений «хромого» ферзя, при которых выигрывает Вася независимо от игры соперника?

3. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ углы A , B , D и E равны по 120° . Также известно, что $FA + AB = CD + DE$ и $AB + BC = DE + EF$.

Найдите остальные углы данного шестиугольника.

4. Из набора натуральных чисел от 1 до 25 выбрали n различных чисел. При каком минимальном n можно утверждать, что среди них обязательно найдутся два числа, одно из которых делится на другое?

5. В некоторой школе каждый семиклассник знаком не менее чем с тремя другими семиклассниками. Докажите, что в любой такой школе можно выбрать группу из чётного числа учащихся (больше двух человек) и посадить их за круглый стол так, чтобы каждый был знаком с обоими соседями?

6. Винтик сконструировал машину, которая побуквенно шифрует текст следующим образом: 1) буква заменяется на ее порядковый номер в алфавите начиная с нуля (см. таблицу); 2) номер умножается на натуральное число a ; 3) затем прибавляется число b ; 4) от результата берется остаток от деления на число 33; 5) выводится буква, чей порядковый номер в алфавите совпадает с результатом пункта 4).

Так, например, при $a = 5$, $b = 20$ буква «Н» шифруется следующим образом: 1) «Н» заменяется на 14; 2) $14 * 5 = 70$; 3) $70 + 20 = 90$; 4) $90 = 2 * 33 + \underline{24}$; 5) возвращается буква «Ч» (имеет номер 24).

Винтик никому не сказал, какие a и b он использовал в своей машине, и ушел по своим делам. Машиной заинтересовался Незнайка. Чтобы проверить, как она работает, он ввел сообщение «ТЕ» и получил на выходе «СТ». Однако ему показалось, что машина работает слишком медленно, и он поменял в ней несколько шестеренок. Как выяснилось позже, после изменений Незнайки на шаге 4) стал находиться остаток при делении на 11 вместо 33.

Наконец, машиной заинтересовался Знайка. Он задумал некоторое осмысленное сообщение, удалил из него все пробелы и знаки препинания, после чего зашифровал его с помощью машины Винтика, измененной Незнайкой. В результате получилось следующее сообщение (пробелы вставлены для удобства прочтения):

АЁБДБ ИДЗБВ ЗЖГИЕ ЁВГЕГ

а) Составьте таблицу, в которой для каждой буквы укажите, в какую букву она переходит с помощью первоначальной машины Винтика.

б) Какое сообщение задумал и зашифровал Знайка?

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	

Заключительный тур

29 апреля 2023

8 класс

- *Время выполнения работы 4 часа (240 мин.).*
- *Пользоваться калькулятором не разрешается!*
- *Разбор решений задач заключительного тура олимпиады состоится 30 апреля 2023 г. в 10:00 в ауд. 605 главного корпуса БГУ (для участников в г. Витебске аудитория будет сообщена дополнительно), после чего можно будет посмотреть свои работы.*
- *Заккрытие олимпиады и награждение победителей состоится сразу после завершения разбора решений, просмотра работ и печати дипломов в той же аудитории 605 главного корпуса (предположительно в 13:00-13:30).*

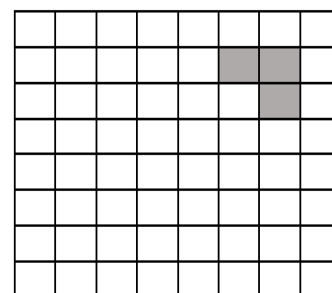
1. Существует ли на клетчатой плоскости *сплошная* (без «дырок») фигура F , для которой *одновременно* выполняются следующие условия:

а) F можно без остатка разрезать на фигурки-«крестики», состоящие из пяти клеток;

б) F можно без остатка разрезать на фигурки в виде буквы «Т», состоящие из четырех клеток.

(Фигурки можно поворачивать, в каждом разрезании используются фигурки только одного вида, резать можно только по границам клеток.)

2. Во время международного шахматного турнира в Новых Васюках была изобретена фигура под названием «хромой» ферзь, которая ходит на одну или две клетки в одном из трех направлений: «вправо» по горизонтали или «вверх» по вертикали, или «вправо-вверх» по диагонали. Также была представлена *новая* шахматная доска, у которой три клетки являются «запретными» (см. рис.). Запрещается на них ставить фигуры, а также перепрыгивать фигурами через эти клетки.



На *новой* шахматной доске в некоторой клетке стоит «хромой» ферзь, которого Вася и Петя по очереди двигают по описанным выше правилам (начинает Вася). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Сколько на доске имеется начальных положений «хромого» ферзя, при которых выигрывает Вася независимо от игры соперника?

3. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ углы A , B и C равны по 120 градусов. Также известно, что для каждой пары смежных сторон этого шестиугольника сумма этих сторон равна сумме противоположных им (то есть $AB+BC = DE+EF$, $BC+CD = EF+FA$ и т.д.). Найдите остальные углы данного шестиугольника.

4. Из набора натуральных чисел от 1 до 50 выбрали n различных чисел. При каком минимальном n можно утверждать, что среди них обязательно найдутся два числа, одно из которых делится на другое?
5. В некоторой школе каждый восьмиклассник знаком не менее чем с тремя другими восьмиклассниками. Докажите, что в любой такой школе можно выбрать группу из чётного числа учащихся (больше двух человек) и посадить их за круглый стол так, чтобы каждый был знаком с обоими соседями?
6. Винтик сконструировал машину, которая побуквенно шифрует текст следующим образом: 1) буква заменяется на ее порядковый номер в алфавите начиная с нуля (см. таблицу); 2) номер умножается на натуральное число a ; 3) затем прибавляется число b ; 4) от результата берется остаток от деления на число 33; 5) выводится буква, чей порядковый номер в алфавите совпадает с результатом пункта 4).

Так, например, при $a = 5$, $b = 20$ буква «Н» шифруется следующим образом: 1) «Н» заменяется на 14; 2) $14 * 5 = 70$; 3) $70 + 20 = 90$; 4) $90 = 2 * 33 + \underline{24}$; 5) возвращается буква «Ч» (имеет номер 24).

Винтик никому не сказал, какие a и b он использовал в своей машине, и ушел по своим делам. Машиной заинтересовался Незнайка. Чтобы проверить, как она работает, он ввел сообщение «ТЕ» и получил на выходе «СТ». Однако ему показалось, что машина работает слишком медленно, и он поменял в ней несколько шестеренок. Как выяснилось позже, после изменений Незнайки на шаге 4) стал находиться остаток при делении на 11 вместо 33.

Наконец, машиной заинтересовался Знайка. Он задумал некоторое осмысленное сообщение, удалил из него все пробелы и знаки препинания, после чего зашифровал его с помощью машины Винтика, измененной Незнайкой. В результате получилось следующее сообщение (пробелы вставлены для удобства прочтения):

АЁБДБ ИДЗБВ ЗЖГИЕ ЁВГЕГ

- а) Составьте таблицу, в которой для каждой буквы укажите, в какую букву она переходит с помощью первоначальной машины Винтика.
- б) Какое сообщение задумал и зашифровал Знайка?

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	

Заключительный тур

29 апреля 2023

9-10 классы

1. Время выполнения работы 4 часа (240 мин.).
2. Пользоваться калькулятором не разрешается.
3. Завтра – 30 апреля 2022 г. в 9.00 в ауд. 522 главного корпуса БГУ (для участников в г. Витебске аудитория будет сообщена дополнительно) состоится разбор решений задач заключительного тура олимпиады ФПМИ, после которого можно будет посмотреть свои работы.
4. Закрытие олимпиады сразу после завершения разбора решений, просмотра работ и печати дипломов в той же аудитории 522 главного корпуса (предположительно не позднее 13.00).

1. Саша и Вася играют в следующую игру: Саша называет два натуральных числа a и b , а Вася должен так подобрать натуральное число k , чтобы числа ka и kb имели одинаковую сумму цифр. Всегда ли Вася сможет это сделать?
2. Найдите минимальное возможное значение выражения $(x-1)(y-1)$, если $x^2+y^2=a$, где a – действительное неотрицательное число.

3. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \left| y + \frac{1}{x} \right| + \left| \frac{13}{6} + x - y \right| = \frac{13}{6} + x + \frac{1}{x}, \\ x^2 + y^2 = \frac{97}{36} \end{cases},$$

удовлетворяющие условиям $x < 0, y > 0$.

4. В остроугольном треугольнике ABC выполняются условия $2BC^2 = AB^2 + AC^2$, $AC > AB$. Пусть M – середина AC , N – середина BC . Перпендикуляр к AC в точке A пересекает BM в точке K . Найдите $\angle ANC$, если $\angle AKC = 36^\circ$.
5. Пусть $p(a)$ – наименьший простой делитель натурального числа a . Натуральные числа $m, n > 1$ таковы, что $m^2 + n = p(m) + (p(n))^2$. Можно ли утверждать, что данное условие выполняется только при $m = n$?
6. Для открытия сейфа необходимо ввести секретный код. Хакер Влад смог установить несколько фактов:

1) Сейф блокируется после 5 неудачных попыток открытия.

2) После каждой попытки код меняется по следующему правилу: новый_код = (старый код $\times x$) mod y , где x и y – неизвестные трехзначные числа, а запись $a \bmod b$ означает остаток от деления числа a на число b .

3) При смене старого кода на новый, старый код отображается на экране сейфа. Влад четыре раза безуспешно пытался угадать код и получил следующую последовательность кодов на экране: 546, 450, 504, 53. Какой код должен ввести Влад, чтобы открыть сейф?

Желаем успеха !

11 класс

1. *Время выполнения работы 4 часа (240 мин.).*
 2. *Пользоваться калькулятором не разрешается.*
 3. *Завтра – 30 апреля 2022 г. в 9.00 в ауд. 513 главного корпуса БГУ (для участников в г. Витебске аудитория будет сообщена дополнительно) состоится разбор решений задач заключительного тура олимпиады ФПМИ, после которого можно будет посмотреть свои работы.*
 4. *Заккрытие олимпиады сразу после завершения разбора решений, просмотра работ и печати дипломов в той же аудитории 513 главного корпуса.*
1. В параллелограмме проведены биссектрисы всех внутренних углов. Четырехугольник, полученный при пересечении этих биссектрис, имеет площадь, равную $\frac{2}{3}$ площади исходного параллелограмма. Найти отношение длины большей стороны параллелограмма к меньшей.
 2. Найти наибольшее значение выражения $\sqrt{(x-1)(y-x)} + \sqrt{(7-y)(1-x)} + \sqrt{(x-y)(y-7)}$ при $x \in [-2; 3]$ и $y \in [0; 11]$.
 3. Из пункта A в пункт B с постоянными скоростями выехали два мотоциклиста, а из B в A одновременно с ними выехал третий мотоциклист с постоянной скоростью $60 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Через 45 мин расстояние между первым и вторым мотоциклистами было в два раза больше, чем между первым и третьим. Через 1 ч после старта расстояние между первым и вторым мотоциклистами было равно расстоянию между первым и третьим, а расстояние, которое осталось проехать третьему мотоциклисту до A , было равно расстоянию между первым и вторым мотоциклистами через 1 ч 30 мин после старта, а также было равно $\frac{2}{5}$ расстояния между первым и третьим мотоциклистами через 1 ч 30 мин после старта. Найти расстояние между пунктами A и B .
 4. Решить систему неравенств
$$\begin{cases} 2x^2 - \log_2(y\sqrt{2} + 6)^3 - 16 \geq y^4 - 3x - y^2, \\ x^2 - y^2 \leq \log_2(y\sqrt{2} + 6) + x + 1. \end{cases}$$
 5. Задано некоторое натуральное число X в десятичной системе счисления, $X < 100000$. Необходимо найти некоторое число в восьмеричной системе счисления, состоящее только из цифр 0 или 1, и которое делится нацело на X .
 6. Для открытия сейфа необходимо ввести секретный код. Хакер Влад смог установить несколько фактов:
 - 1) Сейф блокируется после 10 неудачных попыток открытия.
 - 2) После каждой попытки код меняется по следующему правилу: новый код = (старый код * x) mod y , где x и y – неизвестные трехзначные числа, а запись $a \bmod b$ означает остаток от деления числа a на число b .
 - 3) При смене старого кода на новый, старый код отображается на экране сейфа.
 Влад девять раз пытался угадать код и получил следующую последовательность кодов: 127, 536, 859, 797, 910, 689, 535, 605, 658. Какой код должен ввести Влад, чтобы открыть сейф?

Желаем успеха !