

**Условия задач первого тура олимпиады
по математике, информатике и криптографии**

Задачи для учащихся 11 классов

1. Автобус № 1, на котором ученик может доехать до своей школы без пересадок, идет от его дома до школы 2 часа 1 мин. До школы можно доехать также любым из автобусов № 2, № 3, ..., № K , однако на автобус № P можно пересесть только с автобуса № $(P - 1)$. Маршруты всех автобусов таковы, что, доехав до школы на одном из них, ученик проводит в дороге (не считая пересадок) время, обратно пропорциональное числу использованных автобусов. Кроме того, на каждую пересадку ученику потребуется потратить 4 мин. Верно ли, что существует путь, при котором на дорогу в общей сложности уходит менее 40,1 мин?

2. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}$$

2. Решить уравнение в целых числах

$$x^2 y^2 + x^2 + y^2 - 14xy + 2x - 2y + 37 = 0.$$

3. В треугольнике ABC $AB = 3$, $AC = 3\sqrt{7}$, $\angle ABC = 60^\circ$. Биссектриса угла ABC продолжена до пересечения в точке D с окружностью, описанной вокруг треугольника ABC . Найти длину отрезка BD .

4. Авиакомпания, в которой вы работаете менеджером по кадрам, должна сформировать n экипажей самолётов. Каждый экипаж состоит, помимо других должностей, из двух пилотов: командира и второго пилота. Не допускается, чтобы командир экипажа имел меньший налёт часов, чем его второй пилот. В вашем распоряжении имеется $2n$ кандидатур пилотов, налёт часов каждого пилота известен. При заключении контракта с каждым пилотом была оговорена его зарплата в качестве командира и в качестве второго пилота. Первая величина, естественно, не меньше второй.

Вам необходимо сформировать экипажи таким образом, чтобы минимизировать суммарный фонд зарплаты пилотов. При этом допускается, чтобы зарплата второго пилота была большей, чем зарплата командира его экипажа.

Формат входных данных:

В первой строке описания находится целое чётное число $2n$ – количество кандидатур пилотов ($2 \leq 2n \leq 500000$). Каждая из последующих $2n$ строк соответствует одному пилоту и содержит его зарплату в должности командира и в должности второго пилота, причём первая величина не меньше второй. Значения зарплат – целые положительные числа, не превосходящие 100000. Строки с описаниями зарплат упорядочены строго по возрастанию налёта часов каждого пилота.

Описать алгоритм, который позволяет найти искомый фонд заработной платы пилотов.

Задачи для учащихся 7-8 классов (подготовительная олимпиада)

Важное замечание. В каждой задаче после записи ответа необходимо записать его обоснование (пояснение).

1. В последовательности 1, 2, 4, 8, 16, 22 ... каждый элемент, начиная со второго равен сумме предыдущего элемента и его последней цифры.
А) Найдите 2024-ый элемент.
Б) Является ли число 2024 элементом данной последовательности? Если да, то какой его номер?

2. Решите уравнение в целых числах

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 14xy + 2x - 2y + 37 = 0.$$

3. Мальчик ходит со скоростью 6 км/ч, девочка – со скоростью 4 км/ч, а собака бежит со скоростью 12 км/ч. В некоторый момент из пункта А вышла девочка, а через час – мальчик из того же пункта А и в том же направлении. Одновременно с мальчиком из пункта А выбежала собака, которая бежит все время от одного ребенка к другому. Какое расстояние пробежит собака к моменту, когда мальчик догонит девочку?

4. А) Четыре друга делили между собой 111 орехов. После дележа каждый мальчик обнаружил, что у кого-то из остальных есть либо столько же орехов, сколько у него, либо ровно в два раза больше. Могло ли так быть?

Б) Найдите все возможные натуральные значения K такие, что мальчики, имея K орехов, могли осуществить делёж, описанный в пункте А).

5. Автобус № 1, на котором ученик может доехать до своей школы без пересадок, идет от его дома до школы 2 часа 1 мин. До школы можно доехать также любым из автобусов № 2, № 3, ..., № K , однако на автобус № P можно пересесть только с автобуса № $(P - 1)$. Маршруты всех автобусов таковы, что, доехав до школы на одном из них, ученик проводит в дороге (не считая пересадок) время, обратно пропорциональное числу использованных автобусов. Кроме того, на каждую пересадку ученику потребуется потратить 4 мин. Верно ли, что существует путь, при котором на дорогу в общей сложности уходит менее 40,1 мин?

6. Дан прямой угол O и точка C внутри него. Рассмотрим такой прямоугольник $CDME$, что точки D и E лежат на сторонах угла. Найдите длину отрезка OM , если диагональ прямоугольника равна 10 см, а $\angle OMC = 60^\circ$.

7. Код от сейфа представляет собой четырехзначное число, не содержащее одинаковых цифр. При вводе неверного кода, с помощью специального оборудования можно узнать:

- количество угаданных цифр, расположенных на своих местах;
- количество угаданных цифр, расположенных НЕ на своих местах.

Было предпринято 4 попытки угадать код (см. ниже), и оказалось, что в каждой из попыток была угадана 1 (одна) цифра, расположенная на своем месте, и 0 (нуль) цифр, расположенных не на своих местах:

1) 0826; 2) 4817; 3) 0713; 4) 1527.

Сможете ли вы по этим данным узнать, какой код от сейфа?

Задачи для учащихся 5-6 классов (начальная олимпиада)

Важное замечание. В каждой задаче после записи ответа необходимо записать его обоснование (пояснение).

1. В некотором классе одной школы каждый мальчик поздравил с праздником 8 Марта четыре девочки, а каждая девочка поздравила с 23 февраля пять мальчиков. **Причем общее количество поздравлений от мальчиков девочкам оказалось равным общему числу поздравлений от девочек мальчикам.** Сколько школьников может учиться в этом классе, если известно, что их не более 30? Ответ объясните.
2. Четыре друга – Петя, Витя, Толя и Коля попали в Сказочное Королевство. Петя бежит в два раза быстрее Вити, в три раза быстрее Толи, в 5 раз быстрее Коли и в 10 раз быстрее Королевского Скорохода. На беговой дорожке все стартовали одновременно. Петя прибежал к финишу на 12 секунд раньше Вити. На сколько секунд Петя прибежал к финишу раньше Коли и на сколько секунд раньше Королевского Скорохода? Запиши свои рассуждения и ответ.
3. А) Четыре друга делили между собой 111 орехов. После дележа каждый мальчик обнаружил, что у кого-то из остальных есть либо столько же орехов, сколько у него, либо ровно в два раза больше. Могло ли так быть? Ответ объясните.
Б) Найдите все возможные натуральные значения K такие, что мальчики, имея K орехов, могли осуществить делёж, описанный в пункте А).
4. Некоторые клетки квадратной клетчатой доски $n \times n$ ($n > 3$) покрасили в синий цвет (есть хотя бы одна покрашенная клетка и хотя бы одна непокрашенная). При этом из любых четырех клеток, имеющих общую вершину, покрашено четное количество, т.е. либо все четыре, либо две, либо ни одной. Сколько угловых клеток доски может при этом получиться окрашенными? Укажите все возможности и подтвердите их примерами.
5. В шести примерах каждую цифру зашифровали буквой (одинаковые цифры — одинаковыми буквами, разные цифры — разными):
 - 1) $ИХ - М = А,$
 - 2) $ИМ + М = ХЕ,$
 - 3) $Л + ИМ = ИВ,$
 - 4) $ИВ - А = ИХ,$
 - 5) $ИИ + К = ИЛ,$
 - 6) $ИП - ИТ = Х.$

Запишите число, зашифрованное словом АППЕТИТ. Ответ объясните.

6. Код от сейфа представляет собой четырехзначное число, не содержащее одинаковых цифр. При вводе неверного кода, с помощью специального оборудования можно узнать:
 - количество угаданных цифр, расположенных на своих местах;
 - количество угаданных цифр, расположенных НЕ на своих местах.

Было предпринято 4 попытки угадать код (см.ниже), и оказалось, что в каждой из попыток была угадана 1 (одна) цифра, расположенная на своем месте, и 0 (нуль) цифр, расположенных не на своих местах:

1) 0826; 2) 4817; 3) 0713; 4) 1527.

Сможете ли вы по этим данным узнать, какой код от сейфа?