

**Условия задач первого тура XXXIX Мультипрофильного Турнира  
по математике, информатике и криптографии –**

*прилагаются по 4 параллелям (группам классов)*

**Задачи для учащихся 11 классов**

- (6 баллов)** Несколько грузовиков загружаются поочередно в пункте А (время загрузки одинаково для всех машин) и отвозят груз в пункт В. Там они мгновенно разгружаются и возвращаются в А. Скорости машин одинаковы. Скорость груженой машины составляет  $\frac{6}{7}$  скорости порожней. Первым выехал из А водитель Петров. На обратном пути он встретил водителя Иванова, выехавшего из А последним, и прибыл в А через 6 минут после встречи. Здесь Петров сразу же приступил к загрузке, а по окончании ее выехал в В и встретил Иванова второй раз через 40 минут после первой встречи. От места второй встречи до А Иванов ехал не менее 16 минут, но не более 19 минут. Определите время загрузки.
- (6 баллов)** Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} x + y - \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{12}{x-y}, \\ xy = 15. \end{cases}$$
- (6 баллов)** Решите неравенство  $\cos x - \sin x - \cos 2x > 0$ .
- (6 баллов)** В треугольнике  $ABC$ , все стороны которого различны, биссектриса угла  $BAC$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $D$ . Известно, что  $AB - BD = a$ ,  $AC + CD = b$ . Найти длину отрезка  $AD$ .
- (6 баллов)** Есть две деревни А и В на расстоянии 30 км. В деревне А живет Петя, а в другой вечером состоится дискотека. Пете нужно попасть на дискотеку. У него есть мопед, в бак которого помещается 1 л топлива, и он проезжает на полном баке 15 км. В деревне А есть бочка топлива с объемом 15 л топлива, но Петя не может ее взять с собой. Но он может сливать часть имеющегося топлива из бака по пути и делать закладки (*т.е. запасы топлива*) в некоторых местах. Позже в этих местах (а также в деревне А) он может заправляться, используя имеющееся топливо в этой закладке (или в бочке), доливая топливо в бак. Этот процесс называется заправкой, независимо от количества долитого в бак топлива. Необходимо определить минимальное число заправок, при котором Петя может доехать до деревни. (*Ответ обосновать, т.е. либо указать точное число заправок с указанием мест, где формируются запасы топлива и необходимые оценки, либо получить некоторую формулу (возможно, рекуррентную), при помощи которой можно получить необходимые данные*).
- (6 баллов)** Шифр простой замены представляет собой алгоритм побуквенного шифрования текста с использованием таблицы замены. Каждая буква русского алфавита заменяется соответствующей буквой из таблицы. При этом одинаковые буквы заменяются одинаковыми, разные — разными.

Знайка взял осмысленный русскоязычный текст, удалил из него все знаки препинания и зашифровал его, используя некоторую секретную таблицу замены. В итоге получилось следующий шифртекст (пробелы вставлены для удобства прочтения):

**ЙЪНИА ЯЁМЁЕ ДКНАЪ ТЖХГЛ ЂЁМЛЪ ЁКНКК КЖЙХД ЛЪЁКН КЮЁХК  
ЧВМУЁ ЖЦГВД МУЕИС АKNМС МАЪДИ УЯКЧЪ ДИСМЗ ЖЦУУЁ ДЪЖЪЫ  
СДМЖТ ЕДКЧЖ ЪЖЖЦГ АКТМД ВЕХТШ ХЁХВН МКЁУЕ МФКЪА КУЁХВ**

Незнайке показалось, что полученный у Знайки результат может быть легко взломан. Для «повышения надежности» Незнайка взял исходный текст и таблицу замены у Знайки, но к каждой букве применил шифр простой замены дважды. В результате был получен следующий шифртекст:

**ГБЖКЪ ПРЛРМ ТНЖЪБ ЁЗЫША БРЛАБ РНЖНН НЗГЫТ АБРНЖ НЪРЫН  
ОВЛИР ЗФШВТ ЛИМКУ ЪНЖЛУ ЛЪБТК ИПНОБ ТКУЛЧ ЗФЦИР ТЪЗЪЦ  
УТЛЗЁ МТНОЗ БЗЗФШ ЪНЁЛТ ВМЫЁЩ ЫРЫВЖ ЛНРИМ ЛЙНБЪ НИРЫВ**

Восстановите исходное сообщение.

### **Задачи для учащихся 9-10 классов** (творческая олимпиада)

1. **(6 баллов)** На компьютере хранятся 2025 файлов размером 1 Мб, 2 Мб, 3 Мб, ..., 2024 Мб, 2025 Мб. Можно ли их распределить по трем папкам так, чтобы в каждой папке было одинаковое количество файлов и все три папки имели один и тот же размер?
2. **(6 баллов)** Можно ли из каких-нибудь девяти выпуклых шестиугольников составить какой-нибудь выпуклый сорокаугольник? А из 10 выпуклых шестиугольников можно? (*Примечание.* Никакие части шестиугольников не должны накладываться друг на друга.)
3. **(6 баллов)** Вершина  $C$  прямого угла треугольника  $ABC$  лежит внутри окружности с центром  $O$  и радиусом  $R$ , проходящей через концы гипотенузы  $AB$ ,  $CH$  – высота треугольника  $ABC$ . На прямой  $AB$  взята точка  $K$  так, что  $KH = OH$ . Найдите  $CK$ .
4. **(6 баллов)** Клетчатую доску  $10000 \times 10000$  раскрасили в 2025 цветов. Два цвета назовем дружественными, если существуют две соседние по стороне клетки этих цветов. Какое наименьшее количество дружественных пар цветов может быть?

5. (6 баллов) Известно, что уравнение  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$  имеет ровно три корня. Найдите хотя бы один из них.
6. (6 баллов) Есть две деревни А и В на расстоянии 30 км. В деревне А живет Петя, а в другой вечером состоится дискотека. Пете нужно попасть на дискотеку. У него есть мопед, в бак которого помещается 1 л топлива, и он проезжает на полном баке 15 км. В деревне А есть бочка топлива с объемом 15 л топлива, но Петя не может ее взять с собой. Но он может сливать часть имеющегося топлива из бака по пути и делать закладки (т.е. запасы топлива) в некоторых местах. Позже в этих местах (а также в деревне А) он может заправляться, используя имеющееся топливо в этой закладке (или в бочке), доливая топливо в бак. Этот процесс называется заправкой, независимо от количества долитого в бак топлива. Необходимо определить минимальное число заправок, при котором Петя может доехать до деревни. (Ответ обосновать, т.е. либо указать точное число заправок с указанием мест, где формируются запасы топлива и необходимые оценки, либо получить некоторую формулу (возможно, рекуррентную), при помощи которой можно получить необходимые данные).
7. (6 баллов) Шифр простой замены представляет собой алгоритм побуквенного шифрования текста с использованием таблицы замены. Каждая буква русского алфавита заменяется соответствующей буквой из таблицы. При этом одинаковые буквы заменяются одинаковыми, разные — разными.

Знайка взял осмысленный русскоязычный текст, удалил из него все знаки препинания и зашифровал его, используя некоторую секретную таблицу замены. В итоге получилось следующий шифртекст (пробелы вставлены для удобства прочтения):

**ЙЪНИА ЯЁМЁЕ ДКНАЪ ТЖХГЛ ЪЁМЛЪ ЁКНКК КЖЙХД ЛЬЁКН КЮЁХК  
ЧВМУЁ ЖЦГВД МУЕИС АКНМС МАЪДИ УЯКЧЪ ДИСМЗ ЖЦЫУЁ ДЪЖЪЫ  
СДМЖТ ЕДКЧЖ ЪЖЖЦГ АКТМД ВЕХТШ ХЁХВН МКЁУЕ МФКЪА КУЁХВ**

Незнайке показалось, что полученный у Знайки результат может быть легко взломан. Для «повышения надежности» Незнайка взял исходный текст и таблицу замены у Знайки, но к каждой букве применил шифр простой замены дважды. В результате был получен следующий шифртекст:

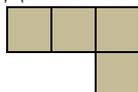
**ГБЖКЪ ПРЛРМ ТНЖЪБ ЁЗЫША БРЛАБ РНЖНН НЗГЫТ АБРНЖ НЪРЫН  
ОВЛИР ЗФШВТ ЛИМКУ ЪНЖЛУ ЛЬБТК ИПНОБ ТКУЛЧ ЗФЦИР ТЪЗЪЦ  
УТЛЗЁ МТНОЗ БЗЗФШ ЪНЁЛТ ВМЫЁЩ ЫРЫВЖ ЛНРИМ ЛЙНБЪ НИРЫВ**

Восстановите исходное сообщение.

## Задачи для учащихся 7-8 классов (подготовительная олимпиада)

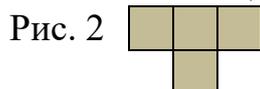
- (6 баллов)** На компьютере хранятся 2025 файлов размером 1 Мб, 2 Мб, 3 Мб, ..., 2024 Мб, 2025 Мб. Можно ли их распределить по трем папкам так, чтобы в каждой папке было одинаковое количество файлов и все три папки имели один и тот же размер?
- Можно ли из каких-нибудь пяти выпуклых шестиугольников составить какой-нибудь выпуклый а) **(2 балла)** 19-угольник; б) **(2 балла)** 20-угольник; в) **(2 балла)** 21-угольник? (*Примечание.* Никакие части шестиугольников не должны накладываться друг на друга.)
- (6 баллов)** Двое играют в следующую игру. На столе лежит 2025 спичек. За ход первый игрок может взять либо 5, либо 8 спичек; второй – либо 4, либо 6 спичек. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков (начинающий или второй игрок) может обеспечить себе выигрыш независимо от ходов соперника, и как он должен для этого играть?
- (6 баллов)** Клетчатую доску  $100 \times 100$  раскрасили в  $k$  цветов ( $k \leq 100$ ). Два цвета назовем *дружественными*, если существуют две соседние по стороне клетки этих цветов. Какое наименьшее количество дружественных пар цветов может оказаться на данной доске (ответ может зависеть от  $k$ )?
- (6 баллов)** Расшифруйте ребус:  $\overline{ABC} \times \overline{AB} \times A = 1000 \times k$ , где  $A, B$  и  $C$  – неравные нулю цифры,  $\overline{ABC}$  и  $\overline{AB}$  – соответственно трехзначное и двузначное числа, состоящие из этих цифр,  $k$  – некоторое натуральное число. Найдите все возможные варианты и покажите, что других вариантов нет (либо докажите, что такое равенство невозможно).
- а) (1 балл)** Дорожный рабочий должен замостить площадку размером 6 м на 6 м. Однако на складе имеются только плитки такого вида, как показано на рис. 1 (сторона клетки в плитке равна 1 м, плитки можно по-всякому поворачивать и переворачивать). У рабочего есть старая изношенная пила, которая сможет сделать ровно один распил длиной 1 м, после чего окончательно выйдет из строя. Сможет ли рабочий замостить площадку?  
Ответ объясните: либо нарисуйте, как он будет замощать площадку, либо обоснуйте, почему он этого не сможет сделать.

Рис. 1



- б) (2 балла)** Теперь дорожный рабочий должен замостить площадку размером 7 м  $\times$  8 м плитками такого вида, как показано на рис. 2 (снова сторона клетки в плитке равна 1 м, плитки можно по-всякому поворачивать). Снова у рабочего есть старая изношенная пила, которая сможет сделать ровно один распил длиной 1 м,

после чего окончательно выйдет из строя. Сможет ли рабочий замостить площадку? Ответ объясните: либо нарисуйте, как он будет замощать площадку, либо обоснуйте, почему он этого не сможет сделать.



**в) (3 балла)** Какое наименьшее количество распилов вам понадобится, чтобы замостить площадку размером 8 м × 8 м плитками такого вида, как показано на рис. 3



### **Задачи для учащихся 5-6 классов** (начальная олимпиада)

**Важное замечание.** В каждой задаче после записи ответа необходимо записать его обоснование (пояснение).

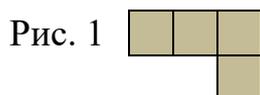
- (3 балла)** Найдите наименьшее натуральное число, оканчивающееся на 19, имеющее сумму цифр 19 и кратное 19.
- (3 балла)** Надя, Аня и Толя поехали отдыхать на море. В первый день Надя собрала несколько ракушек, Толя бросил в море несколько камешков, а Аня съела арбуз. Далее каждый день, начиная с этого дня и заканчивая последним, Надя собирала ракушек на одну больше, чем в предыдущий день, Толя бросал на один камешек меньше, чем в предыдущий день, а Аня съедала арбуз. Оказалось, что за все время отдыха Надя собрала 130 ракушек, Толя бросил 117 камешков, а Аня съела не более 16 арбузов. Сколько дней ребята были на море?
- (4 балла)** Аркадий, Борис и Виктор несколько раз сыграли в «Уно». Призом за победу были конфеты. За победу в первой игре – одна конфета, во второй – две, и так далее, каждый раз разыгрывалось на одну конфету больше. Каждый выиграл хотя бы один раз. В итоге у Аркадия оказалось 6 конфет, у Бориса – 10 конфет, а Виктор выиграл меньшее количество раз, чем любой из первых двух мальчиков. Сколько конфет набрал Виктор, и сколько раз выиграл Борис?
- Из пяти шестиугольников составляют различные многоугольники причем так, чтобы никакие части шестиугольников не накладывались друг на друга.  
**А) (2 балла)** Можно ли таким образом составить 20-угольник?

Б) (2 балла) Многоугольник, с каким наименьшим числом вершин, Вы сможете составить?

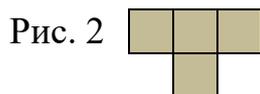
5. (4 балла) Расшифруйте ребус:  $\overline{ABC} \times \overline{AB} \times A = 1000 \times k$ , где А, В и С – неравные нулю цифры,  $\overline{ABC}$  и  $\overline{AB}$  – соответственно трехзначное и двузначное числа, состоящие из этих цифр,  $k$  – некоторое натуральное число. Найдите все возможные варианты и покажите, что других вариантов нет (либо докажите, что такое равенство невозможно).

6. а) (1 балл) Дорожный рабочий должен замостить площадку размером 6 м на 6 м. Однако на складе имеются только плитки такого вида, как показано на рис. 1 (сторона клетки в плитке равна 1 м, плитки можно по-всякому поворачивать и переворачивать). У рабочего есть старая изношенная пила, которая сможет сделать ровно один распил длиной 1 м, после чего окончательно выйдет из строя. Сможет ли рабочий замостить площадку?

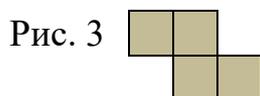
Ответ объясните: либо нарисуйте, как он будет замощать площадку, либо обоснуйте, почему он этого не сможет сделать.



б) (2 балла) Теперь дорожный рабочий должен замостить площадку размером 7м×8м плитками такого вида, как показано на рис. 2 (снова сторона клетки в плитке равна 1 м, плитки можно по-всякому поворачивать). Снова у рабочего есть старая изношенная пила, которая сможет сделать ровно один распил длиной 1 м, после чего окончательно выйдет из строя. Сможет ли рабочий замостить площадку? Ответ объясните: либо нарисуйте, как он будет замощать площадку, либо обоснуйте, почему он этого не сможет сделать.



в) (3 балла) Какое наименьшее количество распилов вам понадобится, чтобы замостить площадку размером 8м × 8м плитками такого вида, как показано на рис. 3



7. (6 баллов) Двое играют в следующую игру. На столе лежит 2025 спичек. За ход первый игрок может взять либо 5, либо 8 спичек; второй – либо 4, либо 6 спичек. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков (начинающий или второй игрок) может обеспечить себе выигрыш независимо от ходов соперника, и как он должен для этого играть?