XXXIV Мультипрофильный турнир –
Олимпиада ФПМИ по математике, информатике и криптографии

Заключительный тур

3 *мая* 2025

5-6 классы

- *Время выполнения работы* ***3,5 часа (210 мин.)***.
- *Запрещается пользоваться калькулятором, а также другими электронными устройствами.*
- *В каждой задаче кроме указания ответа необходимо обосновать его.*

1. (***4 балла***) На фирме «Рога и копыта» есть странный калькулятор. Он самопроизвольно делает такие операции над числом, высвеченным на экране: либо умножает это число на 2 и прибавляет 25, либо умноржает его на 20 и прибавляет 25, либо умножает на 202 и прибавляет 5. Может ли на экране появится число 20250503? Если да, то сколько операций для этого может потребоваться (укажите все возможности), если нет, обоснуйте.

2. (***4 балла***) В задаче на сложение каждая цифра была заменена буквой, причем разные буквы заменены разными цифрами, а одинаковые цифры – одинаковыми буквами. Определите значение C?

$$\begin{array}{r} A\ B\ C \\ A\ B \\ +\quad\quad A \\ \hline 3\ 0\ 0 \end{array}$$

3. (***4 балла***) Каждого из четырёх роботов запрограммировали печатать по два символа. Робот Альфа может печатать символы @ и &; Бетта — символы # и @; Гамма — символы # и %; Дельта — & и %. Вместе они напечатали следующее сообщение: &#%@&&, причем ни один робот не напечатал ни два соседних символа, ни два, стоящих через один символ. Какой из символов каким роботом был напечатан? Ответ обоснуйте.

4. Требуется раскрасить клетки квадратной клетчатой доски размером N×N в черный цвет так, чтобы у любой клетки среди соседних с ней по стороне клеток (по вертикали или по горизонтали) была ровно одна закрашенная.
   А) (***1 балл***) Сможете ли вы так раскрасить доску 4×4? (Здесь и далее либо нарисуйте раскраску, либо обоснуйте, что так раскрасить нельзя.)
   Б) (***3 балла***) Тот же вопрос для доски 3×3.
   В) (***4 балла***) Тот же вопрос для доски 8×8. Сколько закрашенных в черный цвет клеток у вас получилось?

5. (***8 баллов***) Группа из 80 детей спортивной школы «Динамо», в которой было 16 мальчиков-страшекасскников, отправилась в поход. Вечером для установки 20 четырехместных полаток потребовалось вырыть канавки для стока воды вдоль каждой стороны палатки (т.е. всего по 4 канавки для каждой палатки, с учетом стороны перед входом в палатку; *причем палатки не располагаются рядом друг с другом*). Учитель физкультуры показал старшим мальчикам как это делается и, для того чтобы мальчики не болтали во время копки канавок, сказал, что у каждой палатки может трудиться только один мальчик. На рытье одной канавки требуется 10 минут. За какое минимальное время при этом мальчики смогут вырыть все канавки около всех 20 палаток?

6. (***8 баллов***) У алхимика есть много гирек весом 15 г, 33 г, 55 г и двухчашечные весы для взвешивания минералов (вес каждого минерала больше 220 г, класть гирьки на чашу с минералом запрещается). Сможет ли он за одно взвешивание взвесить минерал массой 227 г.

XXXIV Мультипрофильный турнир –
Олимпиада ФПМИ по математике, информатике и криптографии

Заключительный тур

3 *мая* 2025

7-8 класс

- *Время выполнения работы* ***4 часа (240 мин.)***.
- *Запрещается пользоваться калькулятором, а также другими электронными устройствами.*

1. Можно ли раскрасить клетки квадратной клетчатой доски размером $n \times n$ в черный цвет так, чтобы у *любой* клетки среди соседних с ней по стороне клеток (по вертикали или по горизонтали) была ровно одна закрашенная, если
а) $n=4$?
б) $n=10$?

2. Найдите все пары простых чисел (p,q), таких, что корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $x^2 - px - q = 0$ удовлетворяют условию

а) $x_1^2 + x_2^2 = 98$; б) $x_1^3 + x_2^3 = 700$.

3. Дано 101 число (числа необязательно целые). Оказалось, что сумма всех чисел равна (-1), а сумма любых ста из этих чисел – отрицательна. Какое наибольшее целое значение может принимать наибольшее из данных чисел?

4. Внутри параллелограмма *ABCD* отмечена точка *P* такая, что $\angle APD + \angle CPB = 180°$. Высоты остроугольного треугольника *ABP* пересекаются в точке *H*. Докажите, что $\angle BCP + \angle BHP = 180°$.

5. Пусть a_n – число, состоящее из n единиц (например, $a_2 = 11$, $a_5 = 11111$). Найдите наибольшую степень тройки, на которую делится число

$$s_{225} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{225}.$$

6. На окружности по часовой стрелке выписаны буквы русского алфавита в следующем порядке: А, Б, В, Г, Д, Е, Ё, Ж, З, И, Й, К, Л, М, Н, О, П, Р, С, Т, У, Ф, Х, Ц, Ч, Ш, Щ, Ъ, Ы, Ь, Э, Ю, Я. При зашифровании каждая буква заменятся на букву, отстоящую на N позиций по ходу часовой стрелки. Определите N и расшифруйте осмысленное сообщение по зашифрованному тексту:

УЩСШЫЧЛЩЦИЭСЗ ЪУЩДКИНЫ ЫИТЦД.

Примечание к задаче 6: считайте, что решение единственно; если в ходе решения необходимо повторять большое количество однотипных шагов, то достаточно описать эти шаги и привести только несколько.

XXXIV Мультипрофильный турнир –
Олимпиада ФПМИ по математике, информатике и криптографии

Заключительный тур

3 мая 2025

9-10 классы

- *Время выполнения работы* ***4 часа (240 мин.)***.
- *Запрещается пользоваться калькулятором, а также другими электронными устройствами.*

1. Сумма 1015-ти чисел равна -2. Оказалось, что сумма любых 1014-ти чисел из этих чисел – отрицательна. Какое наибольшее целое значение может принимать наибольшее из данных чисел?

2. Найдите все пары натуральных чисел (p,q), таких, что корни x_1 и x_2 квадратного уравнения
$$x^2 - px - q = 0$$
удовлетворяют условию а) $x_1^3 + x_2^3 = 2025$; б) $x_1^5 + x_2^5 = 2025$.

3. В треугольнике *ABC* радиусы окружностей, проходящих через вершину *C* и касающихся прямой *AB* в точках *A* и *B* соответственно равны 27 и 75. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*.

4. Решите уравнение $\sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{2}} + \sqrt{16 + x^2 - 4x\sqrt{2}} = 5$.

5. Найдите все такие функции f: $Q \to Q$, удовлетворяющие условиям
$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1, \text{ для любых } x, y \in Q, \ f(1) = 2.$$

6. На первой окружности по часовой стрелке выписаны все гласные буквы в следующем порядке: А, Е, Ё, И, О, У, Ы, Э, Ю, Я, на второй – все оставшиеся в следующем порядке: Б, В, Г, Д, Ж, З, Й, К, Л, М, Н, П, Р, С, Т, Ф, Х, Ц, Ч, Ш, Щ, Ъ, Ь. При зашифровании буквы с первой окружности она заменяется на букву, отстоящую на N позиций по ходу часовой стрелки на той же окружности, при зашифровании буквы со второй окружности она заменяется на букву, отстоящую на M позиций по ходу часовой стрелки на второй окружности. Определите N, M и расшифруйте осмысленное сообщение по зашифрованному тексту:

ФЭБ ЁЦЭЬЕЖС ДЭЖНАЙДЕФЭЗС ШЭЦЁБЭВВЕЮ ЖЕЕТПЮВАЮ.

Примечание к задаче 6: считайте, что решение единственно; если в ходе решения необходимо повторять большое количество однотипных шагов, то достаточно описать эти шаги и привести только несколько.

XXXIV Мультипрофильный турнир –
Олимпиада ФПМИ по математике, информатике и криптографии

Заключительный тур

3 *мая* 2025

11 класс

- *Время выполнения работы* ***4 часа (240 мин.)***.
- *Запрещается пользоваться калькулятором, а также другими электронными устройствами.*

1. Найдите все пары чисел p и q, при которых неравенство
$$\left|x^2+px+q\right|>2$$
не имеет решений на отрезке $[1;5]$.

2. Найдите функции $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие системе уравнений:
$$\begin{cases} f(4x+3)+xg(6x+4)=2, \\ f(2x+1)+g(3x+1)=x+1. \end{cases}$$

3. В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник, все боковые ребра пирамиды равны друг другу, а высота равна $\sqrt{2}\ \text{см}$. По ребрам пирамиды со скоростью $1\ \frac{\text{см}}{\text{сек}}$ ползет жук. Достаточно ли ему $2\ \text{сек}$ для того, чтобы спуститься из вершины пирамиды по боковому ребру на основание, если вдоль периметра основания он проходит за $8\ \text{сек}$?

4. Сколько положительных корней имеет уравнение $8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1$?

5. На окружности выписаны буквы русского алфавита в следующем порядке: А, Б, В, Г, Д, Е, Ё, Ж, З, И, Й, К, Л, М, Н, О, П, Р, С, Т, У, Ф, Х, Ц, Ч, Ш, Щ, Ъ, Ы, Ь, Э, Ю, Я. При зашифровании каждая гласная буква заменятся на букву, отстоящую на N позиций по ходу часовой стрелки, а каждая согласная буква (а также Ъ и Ь) – на M позиций. Определите N, M и расшифруйте осмысленное сообщение по зашифрованному тексту:

ФСИГЦЭШТП – СШГ РСТЭ Р ШФПУФТ ЮЭЪЦГЗФУЭУ.

Примечание к задаче 5: считайте, что решение единственно; если в ходе решения необходимо повторять большое количество однотипных шагов, то достаточно описать эти шаги и привести только несколько.

6. У вас имеется 2N целых чисел, про которые известно, что их можно разбить на пары таким образом, что произведение чисел во всех парах одинаково. Предложите алгоритм для поиска такого разбиения, если перемножение чисел делать не разрешается (т.е. нельзя вычислять значение произведения двух и более чисел).