РЕШЕНИЯ

Вариант 15 (Решения тестовых заданий)

1. Если билет стоит 15 руб., то после повышения цены на 20% он будет стоить $15\cdot 1.2 = 18$(руб.). При делении числа 100 на 18 в частном получится 5 и в остатке – 10. Поэтому максимальное число билетов составит 5.

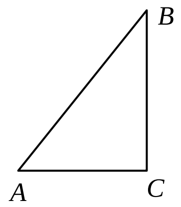
Ответ: 4) 5.

2. $\frac{1}{3}\cdot 5.8+\frac{1}{3}\cdot 8.3=\frac{5.8+8.3}{3}=\frac{14.1}{3}=4.7$.

Ответ: 3) 4.7.

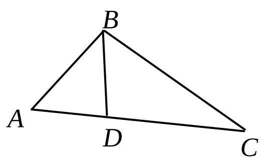
3. Возводя обе части уравнения (положительные) в квадрат, получим уравнение, равносильное исходному: $2x+41=49$, откуда $x=4$.

Ответ: 4) 4.

4. 

Так как $\cos A = 0.8$, то $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=0.6$ и $BC = AB\cdot\sin A = 5\cdot 0.6 = 3$.

Ответ: 3) 3.

5. 

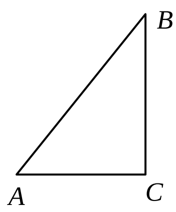
Пользуясь одной из формул, позволяющих вычислить длину биссектрисы, имеем: $BD=\dfrac{2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\frac{B}{2}}{AB+BC}$, откуда последовательно находим: $\cos\frac{B}{2}=\frac{BD\cdot(AB+BC)}{2\cdot AB\cdot BC}=\frac{12\cdot(14+35)}{2\cdot 14\cdot 35}=\frac{3}{5}$,

$\sin B = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=2\sqrt{1-\cos^2\frac{B}{2}}\cos\frac{B}{2}=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$, $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=\frac{1176}{5}$.

Ответ: 4) 235.2.

6. $27^{\frac{2}{3}}-16^{\frac{1}{4}}=\left(3^3\right)^{\frac{2}{3}}-\left(2^4\right)^{\frac{1}{4}}=3^2-2^1=9-2=7$.

Ответ: 5) 7.

7. 

Пусть AB – перпендикуляр к оси Oy, а BC – перпендикуляр к плоскости Oxy. Тогда AC перпендикуляр к оси Oy (по теореме о трех перпендикулярах) и $BC=3,\ AC=6$. Следовательно, по теореме Пифагора $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$.

Ответ: 5) $3\sqrt{5}$.

8. $\begin{cases}-1\le 1-4x<5,\\ 6(1-x)<7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le -4x<4,\\ -6x<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x\le\frac{1}{2},\\ x>-\frac{1}{6}\end{cases}\Rightarrow x\in\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right]$.

Ответ: 4) $x\in\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right]$.

9. Возведем обе части уравнения в квадрат, образуем в правой части получившегося уравнения нуль и разложим левую часть на множители: $\left|x^2+2x\right|=1 \Leftrightarrow \left(x^2+2x\right)^2-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ (x^2+2x+1)(x^2+2x-1)=0$. Отсюда либо $x^2+2x+1=0$ и $x=-1$, либо $x^2+2x+1=0$ и $x=-1\pm\sqrt{2}$.

Ответ: 4) $-1,\ -1\pm\sqrt{2}$.

10. $\dfrac{13x^2-12x-1}{1-x^2}=\dfrac{(x-1)(13x+1)}{(1-x)(1+x)}=-\dfrac{13x+1}{x+1}$.

Ответ: 4) $-\dfrac{13x+1}{x+1}$.

11. $\sin 7x-\sin x=\cos 4x \Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 4x-\cos 4x=0 \Leftrightarrow 2\cos 4x\left(\sin 3x-\dfrac{1}{2}\right)=0$. Отсюда

1) либо $\cos 4x=0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi(2k+1)}{8},\ k\in Z$. Тогда условие $x\in\left[-\dfrac{3\pi}{2};\pi\right]$ дает $x\in\left\{-\dfrac{9\pi}{8},-\dfrac{11\pi}{8}\right\}$;

2) либо $\sin 3x-\dfrac{1}{2}=0 \Rightarrow x=(-1)^m\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{\pi m}{3},\ m\in Z$ и условие $x\in\left[-\dfrac{3\pi}{2};\pi\right]$ дает $x\in\left\{-\dfrac{19\pi}{18},-\dfrac{23\pi}{18}\right\}$.

Следовательно, сумма корней равна $S=-\dfrac{9\pi}{8}-\dfrac{11\pi}{8}-\dfrac{19\pi}{18}-\dfrac{23\pi}{18}=-\dfrac{29\pi}{6}$.

Ответ: 4) $-\dfrac{29\pi}{6}$.

12. $2\log_{\sqrt{3}}(x+1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)\ge 1 \Leftrightarrow 4\log_3(x+1)-\log_3(x+1)\ge 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3(x+1)\ge\dfrac{1}{3} \Rightarrow x\ge\sqrt[3]{3}-1.$

Ответ: 1) $\left[\sqrt[3]{3}-1;+\infty\right)$.

13. Пусть ученик выпускает за 1 час x деталей. Тогда рабочий за то же время выпускает $x+3$ детали. Весь заказ ученик выполнит за $\dfrac{40}{x}$ часов, а рабочий – за $\dfrac{40}{x+3}$ часов. Согласно условию задачи имеем уравнение $\dfrac{40}{x}-\dfrac{40}{x+3}=3$ или $40(x+3-x)=3x(x+3)$. Отсюда $x=5$.

Ответ: 3) 5.

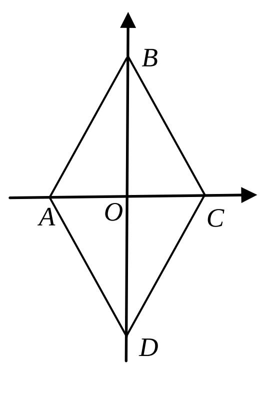
14. Данная прямая пересекает ось абсцисс в точке $B(3,0)$ и ось ординат – в точке $A(0,4)$. Искомое расстояние есть длина высоты OD, опущенной из вершины O прямого угла (из начала координат) на гипотенузу AB, длину которой определим по теореме Пифагора: $AB=5$. Вычисляя площадь различными способами, имеем:

$2S=AO\cdot OB=OD\cdot AB$, откуда $OD=\dfrac{AO\cdot OB}{AB}=\dfrac{3\cdot 4}{5}=2.4$.

Ответ: 4) 2.4.

15. Искомое отношение равно отношению боковых поверхностей конусов, у первого из которых образующая равна AD и радиус основания OD, а у второго – образующая AD и радиус основания AO. Следовательно, $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\pi\cdot OD\cdot AD}{\pi\cdot AO\cdot AD}=\dfrac{OD}{AO}=\mathrm{tg}60^\circ=\sqrt{3}$.

Ответ: 2) $\sqrt{3}$.



Вариант 15

Решения экзаменационных заданий

1. Найдем, сколько чисел из указанного множества делятся хотя бы на одно из чисел 2, 3 или 5. На 2 делятся все числа вида $2k,\ k=1,2,\ldots,250$ (всего 250); на 3 делятся числа вида $3k,\ k=1,2,\ldots,166$ (всего 166); на 5 делятся числа вида $5k,\ k=1,2,\ldots,100$ (всего 100); на 6 делятся числа вида $6k,\ k=1,2,\ldots,83$ (всего 83); на 10 делятся числа вида $10k,\ k=1,2,\ldots,50$ (всего 50); на 15 делятся числа вида $15k,\ k=1,2,\ldots,33$ (всего 33); наконец, на 30 делятся числа вида $30k,\ k=1,2,\ldots,16$ (всего 16). Таким образом, всего чисел, делящихся хотя на одно из чисел 2, 3 или 5, в указанном множестве будет

$$(250+166+100)-(83+50+33)+16=366$$

И, следовательно, ни на одно из этих чисел не делится $500-366=134$ числа.

Ответ: 134 числа.

2. Перепишем уравнение в виде

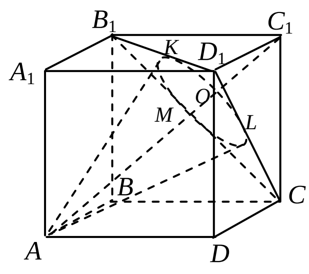
$$(x+\sin(x-5))^2+1-\sin^2(x-5)=0$$

или

$$(x+\sin(x-5))^2+\cos^2(x-5)=0.$$

Тогда уравнение равносильно системе $\begin{cases} x+\sin(x-5)=0, \\ \cos(x-5)=0, \end{cases}$ которая, очевидно, не имеет решений, поскольку из второго уравнения имеем: $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$. Следовательно, $\sin(x-5)=\pm 1$ и первое уравнение дает $x=\pm 1$.

Ответ: Нет решений.



3. Пусть K, L и M – точки касания основания конуса с гранями $A_1B_1C_1D_1$, DD_1C_1C и BB_1C_1C соответственно. Сечение куба плоскостью, проходящей через эти точки, есть правильный треугольник B_1D_1C, а основание конуса – круг, вписанный в этот треугольник. Тогда пирамиды AB_1D_1C и $C_1B_1D_1C$ – правильные, и основания их высот, опущенных из вершин A и C_1 соответственно, представляют одну и ту же точку O, являющуюся центром треугольника B_1D_1C. Таким образом, высота конуса есть часть диагонали куба. Проведем теперь соответствующие вычисления. Так как ребро куба равно b, то стороны треугольника B_1D_1C, являющиеся диагоналями граней куба, равны $b\sqrt{2}$. Следовательно, радиус основания конуса, равный радиусу окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной $b\sqrt{2}$, и равный трети высоты данного треугольника, есть $r=\dfrac{b\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{6}=\dfrac{b\sqrt{6}}{6}$. Теперь, рассмотрев прямоугольный треугольник AOB_1, по теореме Пифагора найдем высоту конуса: $AO^2=AB_1^2-B_1O^2$. Здесь AB_1 – диагональ грани куба, т.е. $AB_1=b\sqrt{2}$, а B_1O равно двум третям высоты правильного треугольника B_1D_1C, т.е. $B_1O=\frac{b\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}=\frac{b\sqrt{6}}{3}$. Таким образом, $AO=\frac{2b\sqrt{3}}{3}$. Тогда $V_к=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{b\sqrt{6}}{6}\right)^2\cdot\frac{2b\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi b^3\sqrt{3}}{27}$.

Ответ: $\frac{\pi b^3\sqrt{3}}{27}$.

4. Перепишем уравнение в виде

$$x^2+12x+4-6\sqrt{x}(x+2)=0$$

или

$$(x+2)^2-6\sqrt{x}(x+2)+8x=0.$$

Данное уравнение есть однородное уравнение второго порядка относительно переменных $x+2$ и $\sqrt{x}$. Поэтому, разделив обе его части на x и обозначая $t=\frac{x+2}{\sqrt{x}}$, получим:

$$t^2-6t+8=0,$$

откуда $t_1=2,\ t_2=4$. Теперь, возвращаясь к исходной переменной, имеем:

1) $\frac{x+2}{\sqrt{x}}=2\ \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}+2=0\Rightarrow$ нет решений;

2) $\frac{x+2}{\sqrt{x}}=4\ \Leftrightarrow x-4\sqrt{x}+2=0\Rightarrow\ \sqrt{x}=2\pm\sqrt{2}\ \Rightarrow\ x=6\pm4\sqrt{2}$.

Ответ: $6\pm4\sqrt{2}$.

Вариант 16 (Решения тестовых заданий)

1. Покупатель за 50 руб. получает 3 шоколадки. В сумму 420 руб. 50 руб. укладывается 8 раз (20 руб. остается). Поэтому наибольшее число шоколадок равно $8\cdot 3 = 24$.

Ответ: 2) 24.

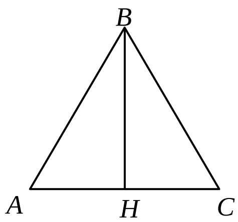
2. Обозначив числитель дроби через $x\in N$, получаем для его определения неравенство $\frac{5}{6} < \frac{x}{24} < 1$, откуда $20 < x < 24$, и так как $x \in N$, то таких дробей будет всего три: с числителями 21, 22 и 23.

Ответ: 3) 3.

3. $3^{x-2} = 27 \Leftrightarrow 3^{x-2} = 3^3 \Rightarrow x = 5$.

Ответ: 3) 5.

4. Так как $\cos A = \frac{12}{13}$, то $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \frac{5}{13}$ и $\operatorname{ctg} A = \frac{12}{5}$. Тогда из треугольника AHB получаем: $AH = \frac{1}{2}AC = BH\operatorname{ctg} A = 16\cdot\frac{12}{5} = 38.4$, т.е. $AC = 76.8$.



Ответ: 2) 76.8.

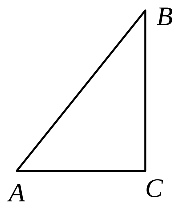
5. Данный четырехугольник – трапеция с основаниями 6 и 3 клетки и высотой 4 клетки. Поэтому $S = \frac{6+3}{2}\cdot 4 = 18$.

Ответ: 3) 18.

6. Возводя данные положительные числа в квадрат и упорядочивая их, получаем: $16 < 17 < 20$. Поэтому $4 < \sqrt{17} < 2\sqrt{5}$.

Ответ: 5) $4 < \sqrt{17} < 2\sqrt{5}$.

7. Пусть AB – перпендикуляр к оси Oz, а BC – перпендикуляр к плоскости Oxz. Тогда AC перпендикуляр к оси Oz (по теореме о трех перпендикулярах) и $BC = 3,\ AC = 2$. Следовательно, по теореме Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$.



Ответ: 1) $\sqrt{13}$.

8. $\begin{cases} x^2 \ge 9, \\ (x+7)(3-x) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+3) \ge 0, \\ (x+7)(x-3) \le 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-7;-3]\cup\{3\}$. Тогда сумма целых решений есть $S = -7-6-5-4-3+3 = -22$.

Ответ: 2) -22.

9. Применяя метод интервалов, имеем:

1) $\lg x < -\frac{1}{3}$. Тогда уравнение примет вид $-3\lg x - 1 + \lg x - 3 = 2 \Leftrightarrow \lg x = -3 \Rightarrow x = 0.001$;

2) $-\frac{1}{3} \le \lg x \le 3$. Тогда уравнение примет вид $3\lg x + 1 + \lg x - 3 = 2 \Leftrightarrow \lg x = 1 \Rightarrow x = 10$;

3) $\lg x > 3$. Тогда уравнение примет вид $3\lg x + 1 - \lg x + 3 = 2 \Leftrightarrow \lg x = -1$. Таким образом, на данном промежутке уравнение решений не имеет.

Окончательно: сумма корней равна $S = 0.001 + 10 = 10.001$.

Ответ: 1) 10.001.

10. $a\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}=\frac{2ab\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{2ab\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=2ab$.

Ответ: 5) $2ab$.

11. $2\cos^2 x+\sin 2x=2 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x-2\sin^2 x=0 \Leftrightarrow 2\sin x(\cos x-\sin x)=0$. Отсюда:

1) $\sin x=0 \Rightarrow x=\pi k,\ k\in Z$ и так как $x\in\left[-\frac{3\pi}{2};-\pi\right]$, то $x=-\pi$;

2) $\cos x-\sin x=0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\, x=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi m,\ m\in Z$. Корней, принадлежащих заданному промежутку, здесь нет.

В итоге сумма корней равна $-\pi$.

Ответ: 3) $-\pi$.

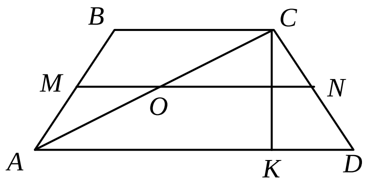
12. $\log_4 x+\log_{\frac{1}{4}} x^2\ge 0 \Leftrightarrow \log_4 x-2\log_4 x\ge 0 \Leftrightarrow \log_4 x\le 0 \Rightarrow x\in(0;1]$.

Ответ: 1) $(0;1]$.

13. Пусть первый рабочий выполняет работу за x дней. Тогда второй – за $x-3$ дня. Согласно условию получаем уравнение $\frac{7}{x}+\frac{5.5}{x-3}=1$ (вся работа выполнена при условии, что первый рабочий отработал 7 дней, а второй – 5.5). Отсюда $2x^2-31x+42=0$ и $x=14$ (второй корень не подходит по величине).

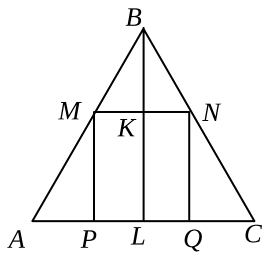
Ответ: 3) 14.

14. Так как MN – средняя линия, то сразу находим основания трапеции: $AD=2ON=10,\ BC=2OM=4$. Теперь по теореме Пифагора, проведя высоту CK, имеем: $CK=\sqrt{CD^2-KD^2}$ и так как $KD=\frac{AD-BC}{2}=3$, то $CK=4$ и $S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}\cdot CK=28$.



Ответ: 4) 28.

15. Выполнив осевое сечение заданной конфигурации фигур, получим прямоугольник $PMNQ$, вписанный в равнобедренный треугольник ABC. При этом MK – радиус основания цилиндра, а AL – конуса. Согласно условию $AL=2MK$. Отсюда в силу подобия треугольников MBK и ABL имеем: $BK=\frac{1}{2}BL$, т.е. $KL=BK=\frac{1}{2}BL$.



Следовательно, $\frac{V_к}{V_ц}=\frac{\frac{1}{3}AL^2\cdot BL}{MK^2\cdot KL}=\frac{4MK^2\cdot 2KL}{3MK^2\cdot KL}=\frac{8}{3}$, а $\frac{V_ц}{V_к}=\frac{3}{8}$.

Ответ: 2) $\frac{3}{8}$.

Вариант 16

Решения экзаменационных заданий

1. Найдем, сколько чисел из указанного множества делятся хотя бы на одно из чисел 2, 5 или 7. На 2 делятся все числа вида $2k,\ k=1,2,\ldots,350$ (всего 350); на 5 делятся числа вида $5k,\ k=1,2,\ldots,140$ (всего 140); на 7 делятся числа вида $7k,\ k=1,2,\ldots,100$ (всего 100); на 10 делятся числа вида $10k,\ k=1,2,\ldots,70$ (всего 70); на 14 делятся числа вида $14k,\ k=1,2,\ldots,50$ (всего 50); на 35 делятся числа вида $35k,\ k=1,2,\ldots,20$ (всего 20); наконец, на 70 делятся числа вида $70k,\ k=1,2,\ldots,10$ (всего 10). Таким образом, всего чисел, делящихся хотя на одно из чисел 2, 5 или 7, в указанном множестве будет

$$(350+140+100)-(70+50+20)+10=460$$

И, следовательно, ни на одно из этих чисел не делится $700-460=240$ чисел.

Ответ: 240 чисел.

2. $\sin^{74}2x+\cos^{73}2x=1 \iff \left(\sin^{74}2x-\sin^2 2x\right)+\left(\cos^{73}2x-\cos^2 2x\right)=0$. Так как справедливы неравенства $\sin^{74}2x\le\sin^2 2x,\ \cos^{73}2x\le\cos^2 2x$, то последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin^{74}2x-\sin^2 2x=0,\\ \cos^{73}2x-\cos^2 2x=0\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\sin^2 2x\left(\sin^{72}2x-1\right)=0,\\ \cos^2 2x\left(\cos^{71}2x-1\right)=0\end{cases}$$

Последняя система, очевидно, распадается на четыре:

1) $\begin{cases}\sin^2 2x=0,\\ \cos 2x=1\end{cases}$ т.е. $x=\pi k,\ k\in Z$;

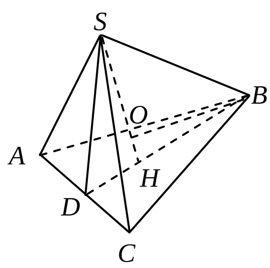
2) $\begin{cases}\sin^2 2x=1,\\ \cos^2 2x=0,\end{cases}$ т.е. $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi m}{2},\ m\in Z$;

3) $\begin{cases}\sin^2 2x=0,\\ \cos^2 2x=0.\end{cases}$ Система несовместна;

4) $\begin{cases}\sin^2 2x=1,\\ \cos 2x=1.\end{cases}$ Система несовместна.

Ответ: $x=\pi k,\ k\in Z$; $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi m}{2},\ m\in Z$.

3. Центры S,A,B,C четырех шаров радиуса R, касающихся друга, являются вершинами правильного тетраэдра, длина ребра которого равна $2R$. Существует два шара, касающихся указанных четырех: со внешним и внутренним касанием. Их радиусы, очевидно, можно найти, если из радиуса шара, описанного около тетраэдра $SABC$, вычесть (при внешнем касании) или к нему добавить (при внутреннем касании) радиус каждого из четырех первых шаров. Поэтому вначале найдем радиус шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром длины $2R$. Как известно, центр O такого шара лежит на высоте SH, основание H которой есть центр правильного треугольника ABC. Следовательно, $BH=\dfrac{2}{3}BD=$



$= \frac{2}{3} AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Тогда $\sin\angle HSB = \frac{BH}{SB} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos\angle HSB = \frac{\sqrt{6}}{3}$ и для радиуса получаем: $SO = \frac{\frac{1}{2}SB}{\cos\angle HSB} = \frac{R}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{R\sqrt{6}}{2}$. Теперь радиусы искомых шаров будут раны $R\left(\frac{\sqrt{6}}{2} \pm 1\right)$.

Ответ: $R\left(\frac{\sqrt{6}}{2} \pm 1\right)$.

4. Перепишем уравнение в виде

$$\left(x^2 - 7x + 10\right)\left(x^2 - 11x + 28\right) = 3$$

или

$$(x-2)(x-5)(x-4)(x-7) - 3 = 0.$$

Теперь перемножим попарно первую и четвертую и вторую и третью скобки:

$$\left(x^2 - 9x + 14\right)\left(x^2 - 9x + 20\right) - 3 = 0$$

и введем новую переменную по формуле $t = x^2 - 9x + 14$. Тогда уравнение примет вид

$$t^2 + 6t - 3 = 0,$$

откуда

$$t_{1,2} = -3 \pm 2\sqrt{3}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, имеем:

1) $x^2 - 9x + 17 - 2\sqrt{3} = 0$. Дискриминант данного квадратного трехчлена положителен, поэтому по теореме Виета $x_1 + x_2 = 9$.

2) $x^2 - 9x + 17 + 2\sqrt{3} = 0$. У этого трехчлена дискриминант отрицателен. Поэтому уравнение вещественных корней не имеет.

Окончательно сумма корней равна 9.

Ответ: 9.