РЕШЕНИЯ

Вариант 17 (Решения тестовых заданий)

1. На 26 м^2 расход краски составит $26 \cdot 0.24 = 6.24$ (кг). Следовательно, останется $12 - 6.24 = 5.76$ (кг).

Ответ: 4) 5.76 кг.

2. $(-2)\cdot(-3^2) - (-6):(-3) = 18 - 2 = 16$.

Ответ: 1) 16.

3. При условии $y \geq 0$ (модуль есть величина неотрицательная) возведем обе части уравнения в квадрат (этим самым «убьем» модуль), затем перенесем все в левую часть и воспользуемся формулой разности квадратов:

$$(y-4)^2 - (2y)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-y-4)(3y-4) = 0.$$

Отсюда $y = -4$ или $y = \frac{4}{3}$. Подходит только положительный корень, который будет единственным.

Ответ: 3) $\frac{4}{3}$.

4. Красных роз юноша купил $15 \cdot 0.2 = 3$ штуки. Осталось $15 - 3 = 12$ роз. Белые составят $12 \cdot 0.25 = 3$. Оставшиеся $12 - 3 = 9$ – желтые.

Ответ: 5) 9.

5. Изданной формулы получим: $P = \frac{n}{140} = \frac{70}{140} = 0.5$ (м).

Ответ: 4) 0.5 м.

6. Осуществим перевод заданных в условии единиц в нужные. В итоге получим: $v = \frac{0.12(км)}{\frac{1}{60}(ч)} = 0.12 \cdot 60 = 7.2\left(\frac{км}{ч}\right)$.

Ответ: 5) 7.2.

7. Меньшая диагональ параллелограмма лежит против острого угла, который в нашем случае равен $180° - 120° = 60°$. Тогда по теореме косинусов получаем:

$$d = \sqrt{6^2 + 16^2 - 2\cdot 6\cdot 16\cdot \cos 60°} = \sqrt{36 + 256 - 2\cdot 6\cdot 16\cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{196} = 14.$$

Ответ:4) 14.

8. Художественная и научно-популярная литература составляют $21 + 15 = 36$ (%), а учебники и учебные пособия – $100 - (7 + 15 + 21) = 57$ (%). Таким образом, имеем пропорцию $\frac{36}{396} = \frac{57}{x}$, откуда $x = \frac{396 \cdot 57}{36} = 627$.

Ответ: 1) 627.

9. Площадь полной поверхности куба вычисляется по формуле $S = 6a^2$, а диагональ – $d = a\sqrt{3}$, где a – длина ребра куба. Из первой формулы имеем: $6a^2 = 18$, т.е. $a = \sqrt{3}$. Тогда $d = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3$.

Ответ: 4) 3.

10. $$\frac{4x^2-1}{x^2-3x+2}>1-2x \Leftrightarrow \frac{4x^2-1+(2x-1)(x^2-3x+2)}{x^2-3x+2}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-1)(x^2-3x+2+2x+1)}{(x-1)(x-2)}>0 \Leftrightarrow \frac{(2x-1)(x^2-x+3)}{(x-1)(x-2)}>0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}>0.$$

Отсюда методом интервалов получаем: $x \in \left(\frac{1}{2};1\right) \cup (2;+\infty)$.

Ответ: 4) $(1/2;1) \cup (2;+\infty)$.

11. Имеем $2-3\sin 2x = 3\sin x - 4\cos x$; $2-6\sin x\cos x = 3\sin x - 4\cos x$;

$2+4\cos x = 6\sin x\cos x + 3\sin x$; $2(1+2\cos x) = 3\sin x(2\cos x+1)$;

$(2\cos x+1)(2-3\sin x)=0$; $\cos x = -\frac{1}{2}$; $\sin x = \frac{2}{3}$; на промежутке $\left[-\frac{\pi}{3};2\pi\right]$

оба уравнения имеют по два корня

Ответ: 4) 4.

12. Стоимость поездки на машине первой фирмы составит $250+50\cdot 11=800$ (руб.), второй – $200+(50-10)\cdot 16=840$ (руб.), третьей – $180+300+(50-15)\cdot 13=935$ (руб.). Таким образом, самый дешевый заказ будет в первой фирме. Его стоимость – 840 руб.

Ответ: 1) 840 руб.

13. Поскольку уравнения системы не меняются при перестановке неизвестных, то система относится к специальному классу симметрических. Один из способов решения таких систем состоит в использовании стандартной замены переменных вида $\begin{cases} u=\sqrt{x}+\sqrt{y}, \\ v=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}. \end{cases}$ Поскольку $x^2+y^2=\left((\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-2\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}\right)^2-2xy$, то система в результате такой замены примет вид $\begin{cases} \sqrt{(u^2-2v)^2-2v^2}+\sqrt{2}v=8\sqrt{2}, \\ u=4. \end{cases}$ Используя второе уравнение, первое перепишем в виде $\sqrt{(16-2v)^2-2v^2}=8\sqrt{2}-\sqrt{2}v$ или, после возведения обеих его частей в квадрат (при условии $v\le 8$) $256-64v+2v^2=128-32v+2v^2$. Отсюда $v=4$. В итоге, возвращаясь к исходным переменных, получаем систему $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=4, \\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=4. \end{cases}$ На основании обратной теоремы Виета величины $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ являются корнями квадратного уравнения $t^2-4t+4=0$, т.е. $\sqrt{x}=\sqrt{y}=2$ и, значит, $x=y=4$. Следовательно, $x+y=8$.

Ответ: 3) 8.

14. Вводя новую переменную $t=2^x>0$, получим иррациональное неравенство $\sqrt{t-7}>9-t$, равносильное следующей совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t>9, \\ t\ge 7, \end{cases} \\ \begin{cases} t\le 9, \\ t-7>(9-t)^2. \end{cases} \end{array}\right.$ Решая квадратное

неравенство, получаем: $t^2 - 19t + 88 < 0$, откуда $t \in (8;11)$. Следовательно, решением совокупности будет $t > 8$ или, возвращаясь к исходной переменной, $2^x > 8$, откуда $x \in (3:+\infty)$

Ответ: 4) $(3:+\infty)$.

15. Преобразуем правую часть уравнения:

$x(1-\lg 5) = x(\lg 10 - \lg 5) = x\lg 2 = \lg 2^x$. Тогда $2^x + x - 41 = 2^x$, $x - 41 = 0$, $x = 41$.

Ответ: 2) 41.

Вариант 17

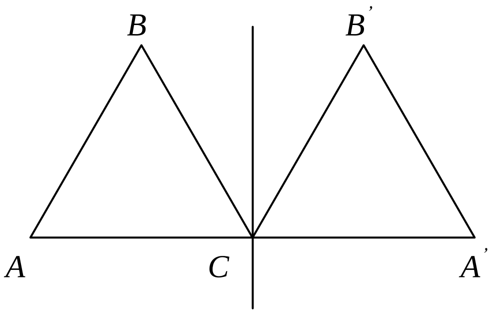
Решения экзаменационных заданий

1. Всего было 121 дыня. 22 дыни отданы в уплату налога на оставшиеся 121-22=99 дынь. Поэтому налог составил 2 дыни за 9 дынь. Налог с 41 дыни Ходжи Насреддина составил бы $\frac{41}{9} \cdot 2 = 9\frac{1}{9}$. Следовательно, $\frac{1}{9}$ дыни стоит 1 таньга, то есть дыня стоит 9 таньга.

Ответ: 9 таньга.

2. Объем полученного тела вращения можно (см. рисунок осевого сечения) найти как разность объема усеченного конуса, окружности оснований которого образованы вращением точек *A* и *B*, и объема конуса с вершиной в точке *C*, окружность основания которого образована вращением точки *B*.

Ответ: 576π.



3. Перепишем систему в виде $\begin{cases} 3^{x+2y} + 2\cdot 3^{3y} \le 6, \\ x + 5y \ge \log_3 \frac{9}{2}. \end{cases}$ После этого первое неравенство умножим на 3^{3y}, а второе спотенцируем. Получим: $\begin{cases} 3^{x+5y} + 2\cdot 3^{6y} \le 6\cdot 3^{3y}, \\ 3^{x+5y} \ge \frac{9}{2}. \end{cases}$ Теперь, используя второе неравенство, для первого получим неравенство-следствие $\frac{9}{2} + 2\cdot 3^{6y} \le 3^{x+5y} + 2\cdot 3^{6y} \le 6\cdot 3^{3y}$, откуда следует, что y должен удовлетворять неравенству $2\cdot 3^{6y} + \frac{9}{2} \le 6\cdot 3^{3y}$ или $\frac{1}{2}(2\cdot 3^{3y} - 3)^2 \le 0$. Отсюда получаем единственное значение y, удовлетворяющее неравенству-следствию: $2\cdot 3^{3y} - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{3y} = \frac{3}{2} \quad y = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\log_3 2$. При этом значении y первое неравенство исходной системы примет вид $3^{x+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\log_3 2-1} + 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3} \le 2$ или $3^{x-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\log_3 2} \le 1$, т.е. $x \le \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\log_3 2$. В то же время из второго неравенства исходной системы получаем:

$x+\frac{5}{3}-\frac{5}{3}\log_3 2\ge 2-\log_3 2$ или $x\ge\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\log_3 2$. Таким образом, $x=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\log_3 2$. Проверкой убеждаемся, что найденные значения являются решениями.

Ответ: $\begin{cases} x=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\log_3 2 \\ y=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\log_3 2 \end{cases}$

4. Учитывая, что левая часть уравнения есть сумма двух квадратов, дополним ее до квадрата суммы, добавив и вычтя соответствующие удвоенные произведения: $\left(\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}\right)^2-2\cdot\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x}{x+1}-\frac{45}{16}=0$. Приводя в скобках подобные, приведем уравнение к виду $\left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x^2-1}-\frac{45}{16}=0$. Таким образом, получили квадратное уравнение относительно $t=\frac{2x^2}{x^2-1}$. Решая его получаем: $\frac{2x^2}{x^2-1}=\frac{1\pm\sqrt{1+\frac{45}{4}}}{2}=\frac{1\pm\frac{7}{2}}{2}$, т.е., либо $\frac{2x^2}{x^2-1}=\frac{9}{4}$ и тогда $x=\pm 3$, либо $\frac{2x^2}{x^2-1}=-\frac{5}{4}$ и тогда $x=\pm\sqrt{\frac{5}{13}}$.

Ответ: ± 3; $\pm\sqrt{\frac{5}{13}}$.

Вариант 18 (Решения тестовых заданий)

1. 100 л бензина стоят $100 \cdot 34.5 = 3450$ (руб.). Поэтому водитель получит $5000 - 3450 = 1550$ (руб.) сдачи.

Ответ: 2) 1550.

2. $(-4):(-1^4)\cdot(-1)^2:(-2)+7\cdot(-1^2)=(-4):(-1)\cdot 1:(-2)+7\cdot(-1)=-2-7=-9$.

Ответ: 5) -9.

3. При условии $x \le 0$ (модуль есть величина неотрицательная) возведем обе части уравнения в квадрат (этим самым «убьем» модуль), затем перенесем все в левую часть и воспользуемся формулой разности квадратов:

$$(4x-1)^2-(-8x)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (-4x-1)(12x-1)=0.$$

Отсюда $x=-0.25$ или $x=\dfrac{1}{12}$. Подходит только отрицательный корень, который будет единственным.

Ответ: 3) -0.25.

4. Во время распродажи при скидке 15% флакон герметика будет стоить $180 \cdot 0.85 = 153$ (руб.). Следовательно, на 1000 руб. можно будет купить $1000:153=6.5\ldots$, т.е. 6 флаконов.

Ответ: 3) 6.

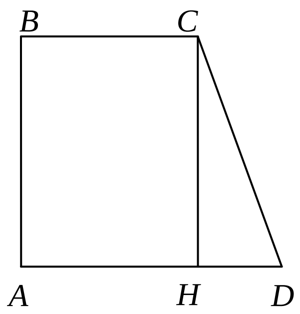
5. Из данной формулы получим: в минуту Павел делает $n=140\cdot 0.8=112$ шагов. Следовательно, его скорость составит $112\cdot 0.8=89.6$ (м/мин).

Ответ: 4) 89.6.

6. Осуществим перевод заданных в условии единиц в нужные. В итоге получим: $v=\dfrac{1200\ \cdot 1000\ (м)}{3600\ (сек)}=\dfrac{1000}{3}=333\,\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{м}{сек}\right)$.

Ответ: 5) $333\dfrac{1}{3}$.

7. Опустим высоту из вершины C. Так как трапеция прямоугольная, то $CH=AB=40$. Теперь по теореме Пифагора из ΔCHD находим: $HD=\sqrt{CD^2-CH^2}=\sqrt{41^2-40^2}=9$. Тогда $S_{ABCD}=\dfrac{BC+AD}{2}\cdot CH=\dfrac{BC+AH+HD}{2}\cdot CH=\dfrac{15+15+9}{2}\cdot 40=780$.

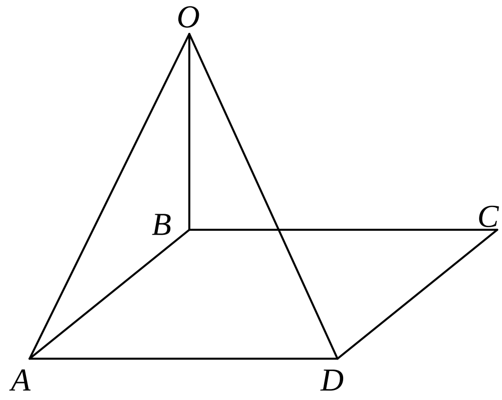


Ответ: 2) 780.

8. Методические пособия и научно-популярная литература составляют $7+15=22$ (%), а вся литература вместе – 100%. Таким образом, имеем пропорцию $\dfrac{22}{198}=\dfrac{100}{x}$, откуда $x=\dfrac{198\cdot 100}{22}=900$.

Ответ: 2) 900.

9. Так как OB – перпендикуляр к плоскости квадрата, то ΔOBA прямоугольный и по теореме Пифагора имеем: $OA=\sqrt{OB^2+AB^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ и, поскольку по теореме о трех перпендикулярах $OA\perp AD,\ S_{OAD}=\frac{1}{2}OA\cdot AD=\frac{4\cdot 5}{2}=10$.



Ответ: 5) 10.

10. Выполним эквивалентные преобразования

$$\frac{25}{x^2-4x}\geq x^2-4x \Leftrightarrow \frac{25-\left(x^2-4x\right)^2}{x^2-4x}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x^2-4x-5\right)\left(x^2-4x+5\right)}{x\left(x-4\right)}\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x+1\right)\left(x-5\right)}{x\left(x-4\right)}\leq 0.$$

Отсюда методом интервалов получаем: $x\in\left[-1;0\right)\bigcup\left(4;5\right]$.

Ответ: 4) $\left[-1;0\right)\cup\left(4;5\right]$.

11. Выполним цепочку эквивалентных преобразований: $2-\sin 2x-2\cos^2 x=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2\sin^2 x-2\sin x\cos x=0\Leftrightarrow 2\sin x(\sin x-\cos x)=0$. Отсюда имеем два случая: а) $\sin x=0$, откуда $x=\pi k,\ k\in Z$ и, учитывая ограничение, $x_1=-\pi,\ x_2=-2\pi$; б) $\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow \operatorname{tg} x=1$, т.е. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$ и $x_3=-\frac{7\pi}{4}$. Таким образом, $S=-\pi-2\pi-\frac{7\pi}{4}=-\frac{19\pi}{4}$.

Ответ: 4) $-\frac{19\pi}{4}$.

12. Стоимость покупки у первого поставщика составит $2600\cdot 70+10000=192000$ (руб.), у второго – $2800\cdot 70+0=196000$ (руб.), у третьего – $2700\cdot 70+8000=197000$ (руб.). Таким образом, самый дешевый заказ будет у первого поставщика. Его стоимость – 192000 руб.

Ответ: 2) 192000.

13. Из первого уравнения следует, что $x\geq y$ (так как левая часть неотрицательна). Из второго уравнения следует, что $x\neq y$. Тогда $\sqrt{x^2-xy}=\sqrt{x}\sqrt{x-y}$, $\sqrt{xy-y^2}=\sqrt{y}\sqrt{x-y},\ \ x-y=\left(\sqrt{x-y}\right)^2$. Поэтому после сокращения первого уравнения системы на $\sqrt{x-y}$ перепишем его в виде $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3\sqrt{x-y}$, откуда, в свою очередь, после деления на $\sqrt{x}\neq 0$ получаем $\left(t=\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$: $1+t=3\sqrt{1-t^2}$ или (сокращаем обе части на $\sqrt{1+t}\neq 0$) $\sqrt{1+t}=3\sqrt{1-t}$. Следовательно, $t=\frac{4}{5}$ и, значит, $\frac{y}{x}=\frac{16}{25}$, т.е. $y=\frac{16}{25}x$. Под-

ставляя найденное выражение во второе уравнение исходной системы и учитывая положительность x, находим: $x=\frac{25}{3}$. Тогда $y=\frac{16}{3}$ и $x+y=\frac{41}{3}$.

Ответ: 3) $\frac{41}{3}$.

14. Вводя новую переменную $t=2^x>0$, получим иррациональное неравенство $\sqrt{4t^2+17}>5-t$, равносильное следующей совокупности $\left[\begin{array}{l} t>5, \\ \begin{cases} t\le 5, \\ 4t^2+17>(5-t)^2. \end{cases} \end{array}\right.$ Решая квадратное неравенство, получаем: $3t^2+10t-8>0$, откуда для системы $(t>0)$ $t\in\left(\frac{2}{3};5\right]$. Следовательно, решением совокупности будет $t>\frac{2}{3}$ или, возвращаясь к исходной переменной, $2^x>\frac{2}{3}$, откуда $x\in(1-\log_2 3:+\infty)$

Ответ: 4) $(1-\log_2 3:+\infty)$.

15. Имеем $\log_3\left(2^x-1\right)\cdot\log_3\frac{2}{6\left(2^x-1\right)}=-2,$

$\log_3^2\left(2^x-1\right)+\log_3\left(2^x-1\right)-2=0,$ $\log_3\left(2^x-1\right)=1$ или $\log_3\left(2^x-1\right)=-2,$

$2^x=4,$ $x=2$ или $2^x=\frac{10}{9},$ $x=\log_2\frac{10}{9}.$ Больший корень: $x=2$, всего 2 корня.

Ответ: 2) 4.

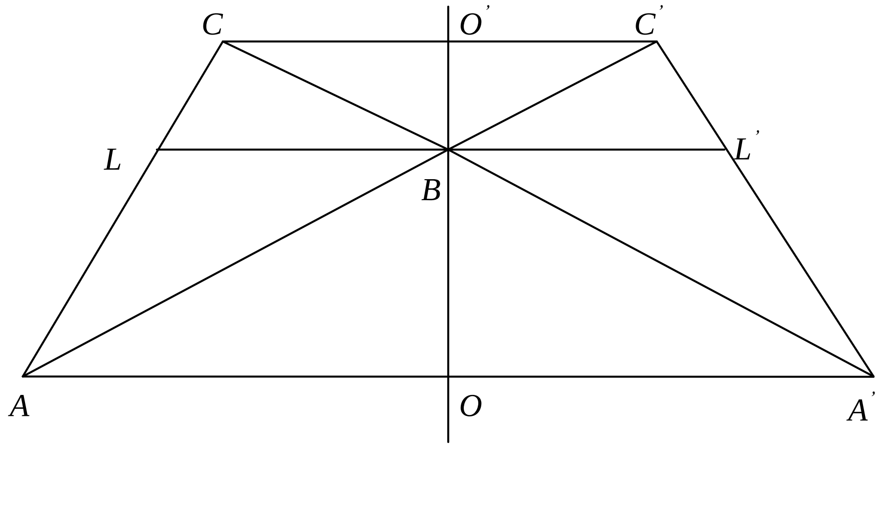
Вариант 18

Решения экзаменационных заданий

1. Машина сэкономила 10 мин., которые должны были уйти на её путь от места встречи с инженером до станции и обратно до места встречи. То есть, чтобы доехать от места встречи с инженером до станции к установленному времени машине нужно 5 мин. Значит, инженер это же расстояние прошёл пешком за 55 – 5 = 50(мин.). Следовательно, скорость машины больше скорости инженера в 50 : 5 = 10 (раз).

Ответ: 10.

2. Пусть ABC – заданный треугольник: $BC=2,$ $\angle ABC=60°$, LL' – биссектриса $\angle ABC,$ OO' – ось вращения. Тогда объем тела вращения (на рисунке изображено его осевое сечение) можно вычислить как разность между объемом усеченного конуса с



радиусами оснований OA и $O'C$ и суммой объемов конусов, осевые сечения которых – треугольники CBC' и ABA'. При этом $AB=2BC=4$ (так как $\angle CAB=30°$). Аналогично получаем: $BO=\frac{1}{2}AB=2,\ BO'=\frac{1}{2}BC=1$, $AO=2\sqrt{3},\ CO'=\sqrt{3}$. Далее вычисления по соответствующим формулам объемов дают: $V=12\pi$.

Ответ: 12π.

3. Умножим первое неравенство на 11^{3x+4}, а второе спотенцируем. Получим: $\begin{cases}(11^{3x+4})^2+3\cdot 11^{5x-3y+3}-2\cdot 11^{3x+4}\le 0,\\ 11^{5x-3y+3}\ge \frac{1}{3}.\end{cases}$ Теперь, используя второе неравенство, для первого получим неравенство-следствие $(11^{3x+4})^2+3\cdot\frac{1}{3}-2\cdot 11^{3x+4}\le (11^{3x+4})^2+3\cdot 11^{5x-3y+3}-2\cdot 11^{3x+4}$, откуда следует, что x должен удовлетворять неравенству $(11^{3x+4}-1)^2\le 0$. Отсюда получаем единственное значение x, удовлетворяющее неравенству-следствию: $11^{3x+4}-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad 11^{3x+4}=1 \quad x=-\frac{4}{3}$. При этом значении x первое неравенство исходной системы примет вид $1+3\cdot 11^{-\frac{8}{3}-3y-1}-2\le 0$ или $11^{-3y-\frac{11}{3}}\le\frac{1}{3}$, т.е. $y\ge\frac{1}{3}\log_{11}3-\frac{11}{9}$. В то же время из второго неравенства исходной системы получаем: $-\frac{20}{3}-3y+3\ge-\log_{11}3$ или $y\le\frac{1}{3}\log_{11}3-\frac{11}{9}$. Таким образом, $y=\frac{1}{3}\log_{11}3-\frac{11}{9}$. Проверкой убеждаемся, что найденные значения являются решениями.

Ответ: $x=-\frac{4}{3};\ y=\frac{1}{3}\cdot\log_{11}3-1\frac{2}{9}$.

4. Перепишем уравнение в виде $\frac{x^2}{2x^2-1}+7x+6(2x^2-1)=0$ или, освобождаясь от знаменателя, $x^2+7x(2x^2-1)+6(2x^2-1)^2=0$. Таким образом, получаем однородное относительно переменных x и $2x^2-1$ уравнение второй степени. Дальнейшее решение можно провести, например, так: делим почленно уравнение на $(2x^2-1)^2$ и вводим новую переменную по формуле $t=\frac{x}{2x^2-1}$. Получим квадратное уравнение $t^2+7t+6=0$, откуда $t=-1$ или $t=-6$. В первом случае, возвращаясь к исходной переменной, имеем:

$\frac{x}{2x^2-1}=-1 \Leftrightarrow 2x^2+x-1=0 \Rightarrow x_1=-1,\ \ x_2=\frac{1}{2}$, а во втором

$\frac{x}{2x^2-1}=-6 \Leftrightarrow 12x^2+x-6=0 \Rightarrow x_3=\frac{2}{3},\ \ x_2=-\frac{3}{4}$.

Ответ: $-1,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ -\frac{3}{4}$.