РЕШЕНИЯ

Вариант 19 (Решения тестовых заданий)

1. Согласно заданному уравнению графиком является квадратичная парабола с направленными вверх ветвями и вершиной, расположенной в точке с координатами $(-1;2)$.

Ответ: 1).

2. Покупка 100 л бензина по цене 3.45 руб. за 1 л обойдется водителю в $3.45\cdot 100 = 345$ (руб.). Поэтому сдача, которую водитель получит с 500 руб. равна $500-345=155$ (руб.)

Ответ: 2) 155 руб.

3. Вычитая из всех частей заданного двойного неравенства $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$, получим неравенство, равносильное исходному:

$$-25\frac{3}{4}<-3x<4\frac{1}{2} \quad \text{или} \quad -\frac{103}{4}<-3x<\frac{9}{2}.$$

Отсюда после деления на -3 находим решение: $-\frac{3}{2}<x<\frac{103}{12}$. Следовательно, наименьшее целое решение есть $x_{\min}=-1$, а наибольшее – $x_{\max}=8$ и тогда $x_{\min}\cdot x_{\max}=(-1)\cdot 8=-8$.

Ответ: 4) -8.

4. После снижения цен на 15% банка краски будет стоить $1.8-1.8\cdot 0.15=1.53$ (руб.). Следовательно, 6 банок краски обойдутся в $1.53\cdot 6=9.18$ (руб.), а 7 – в $1.53\cdot 7=10.71$ (руб.). Таким образом, на 10 руб. можно будет купить 6 банок краски.

Ответ: 3) 6 банок.

5. $$x(x-4)\le\frac{25}{x^2-4x}\Leftrightarrow(x^2-4x)-\frac{25}{x^2-4x}\le 0\Leftrightarrow\frac{(x^2-4x)^2-25}{x(x-4)}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{(x^2-4x-5)(x^2-4x+5)}{x(x-4)}\le 0\Leftrightarrow\frac{(x-5)(x+1)}{x(x-4)}\le 0$$

Отсюда методом интервалов получаем: $x\in[-1;0)\cup(4;5]$.

Ответ: 4) $x\in[-1;0)\cup(4;5]$.

6. $$0.3^{\frac{\lg 128}{\lg 4}-4}=0.3^{\frac{\lg 2^7}{\lg 2^2}-4}=0.3^{\frac{7\lg 2}{2\lg 2}-4}=0.3^{\frac{7}{2}-4}=\left(\frac{3}{10}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{10}{3}}.$$

Ответ: 4) $\sqrt{\frac{10}{3}}$.

7. Область допустимых значений неравенства определяется неравенством $x>0$. Так как на ОДЗ $\log_{\frac{1}{4}}x^2=-2\log_4 x$, то неравенство принимает вид

$$\log_4 x-2\log_4 x\ge 0$$

или

$$\log_4 x\le 0,$$

откуда, потенцируя, с учетом ОДЗ получаем: $x\in(0;1]$.

Ответ:1) $x\in(0;1]$.

8. Пусть процент уценки равен p. Тогда после первой уценки собрание сочинений будет стоить $C=350-350\cdot\frac{p}{100}=350\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)$ (руб.), а после второй –

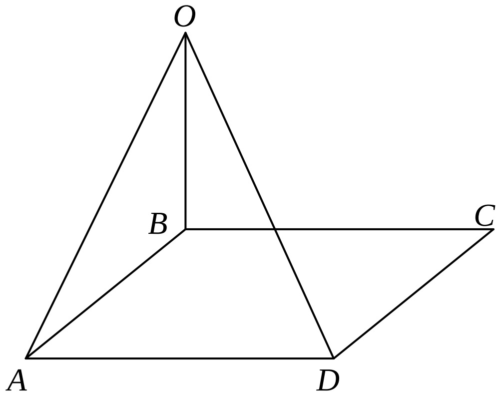
$B = C - C\cdot\frac{p}{100} = C\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right) = 350\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)^2$ (руб.). Поэтому согласно условию, имеем уравнение $350\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)^2 = 283.5$ или $\left(1-\frac{p}{100}\right)^2 = 0.81$, откуда $p = 10$.

Ответ: 4) 10.

9. $\frac{\sin 18\alpha}{\sin 6\alpha} - \frac{\cos 18\alpha}{\cos 6\alpha} = \frac{\sin 18\alpha\cos 6\alpha - \cos 18\alpha \sin 6\alpha}{\sin 6\alpha\cos 6\alpha} = \frac{2\sin(18\alpha - 6\alpha)}{\sin 12\alpha} = 2$.

Ответ: 3) 2.

10. Так как OB – перпендикуляр к плоскости квадрата, то ΔOBA прямоугольный и по теореме Пифагора имеем: $OA = \sqrt{OB^2 + AB^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ и, поскольку по теореме о трех перпендикулярах $OA \perp AD$, $S_{OAD} = \frac{1}{2}OA\cdot AD = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$.



Ответ: 5) 10.

11. Имеем:

$$3+6\sin 2x = -9\sin x - 4\cos x \Leftrightarrow 3 + 12\sin x\cos x + 9\sin x + 4\cos x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (3+4\cos x) + (9\sin x + 12\sin x\cos x) = 0 \Leftrightarrow (3+4\cos x) + 3\sin x(3+4\cos x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (3+4\cos x)(1+3\sin x) = 0.$$

Таким образом, уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}4\cos x + 3 = 0,\\ 3\sin x + 1 = 0,\end{array}\right.$ каждое из уравнений которой на промежутке $\left[-2\pi; \frac{\pi}{6}\right]$ имеет по два корня (при этом все корни различны).

Поэтому всего корней будет четыре.

Ответ: 4) 4.

12. Стоимость покупки с доставкой у первого поставщика составит $70\cdot 26 + 100 = 1920$ (руб.), у второго – $70\cdot 28 = 1960$ (руб.) (так как заказ больше 1500 руб., то доставка бесплатно), у третьего – $70\cdot 28 + 80 = 1970$ (руб.). Таким образом, самый дешевый заказ будет у первого поставщика. Его стоимость – 1920 руб.

Ответ: 1) 1920 руб.

13. Область допустимых значений задачи определяется условиями $x \neq \pm y$. Освобождаясь на ОДЗ от знаменателя в первом уравнении, получаем:

$$(x+2y)(x+y) + (x-2y)(x-y) - 4(x-y)(x+y) = 0$$

или (после приведения подобных)

$$-2x^2 + 8y^2 = 0.$$

Отсюда имеем два случая: $x = 2y$ или $x = -2y$. В первом из них второе уравнение перепишется в виде $7y^2 = 21$, откуда $y = \pm\sqrt{3}$ и тогда $x = \pm 2\sqrt{3}$, а во втором – $3y^2 = 21$, откуда $y = \pm\sqrt{7}$ и, значит, $x = \mp 2\sqrt{7}$. Таким образом, наименьшее значение x, удовлетворяющее системе, равно $-2\sqrt{7}$.

Ответ: 4) $-2\sqrt{7}$.

14. Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ABC. Тогда по свойству медиан имеем: во-первых,

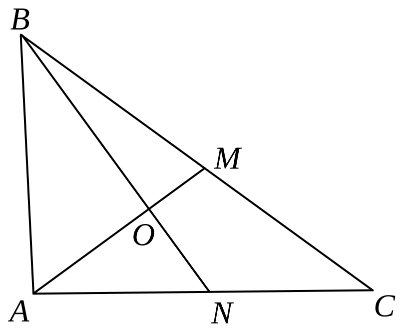
$$S_{AOB} = \frac{1}{3}S_{ABC},$$

а во-вторых,

$$AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}m,\ BO = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}n,$$

а поскольку по условию $BN \perp AM$, то ΔABC – прямоугольный. Учитывая сказанное, получаем:

$$S_{ABC} = 3S_{AOB} = 3\cdot\frac{1}{2}AO\cdot BO = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}m\cdot\frac{2}{3}n = \frac{2}{3}mn.$$



Ответ: 5) $\frac{2}{3}mn$.

15. Поскольку сфера второго шара внутренним образом касается сферы первого шара и содержит центр первого шара, то, учитывая, что точка касания сфер находится на линии их центров, получаем: диаметр второго шара равен радиусу первого, а значит, площадь поверхности второго шара в 4 раза меньше, т.е. равна $160\pi : 4 = 40\pi$.

Ответ: 2) 40π.

Вариант 19

Решения экзаменационных заданий

1. Пусть i-й преподаватель проверяет все работы за x_i часов ($i = 1,\ldots,5$). Тогда первый, второй и четвертый преподаватели, работая вместе, за один час проверят $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_4}$ работ, что, согласно условию, составляет $\frac{1}{20}$ часть. Поэтому получаем уравнение

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_4}=\frac{1}{20}.$$

Записывая аналогично второе и третье условия задачи, получаем систему

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_4}=\frac{1}{20}, \\ \frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_5}=\frac{1}{15}, \\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5}=\frac{1}{10}. \end{cases}$$

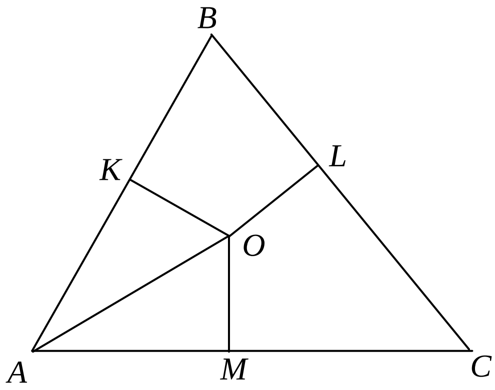
Вычитая из суммы двух первых уравнений третье, получим:

$$\frac{2}{x_2}=\frac{1}{60},$$

откуда $\frac{1}{x_2} = \frac{1}{120}$ и $x_2 = 120$. Тогда, используя третье уравнение системы, получим: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} = \frac{1}{120} + \frac{1}{10} = \frac{13}{120}$, а значит, все преподаватели вместе смогут проверить все работы за $1 : \frac{13}{120} = \frac{120}{13}$ (часа). Таким образом, искомое отношение равно $120 : \frac{120}{13} = 13$.

Ответ: в 13 раз.

2. Пусть ΔABC – заданный, $\angle A = 60°$, O – центр вписанной окружности и K, L, M – точки касания вписанной окружности со сторонами. Прежде всего, используя следствие из теоремы синусов, найдем сторону BC:



$$BC = 2R\sin\angle A = 2 \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \sin 60° = \frac{14}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7.$$

Далее, поскольку O – центр вписанной окружности и M – точка касания, то, во-первых, AO – биссектриса, и, значит, $\angle OAM = \frac{1}{2}\angle A = 30°$, а во-вторых, $OM \perp AC$ (как радиус, проведенный в точку касания). Поэтому из прямоугольного ΔAMO имеем:

$$AM = OM \cdot \operatorname{ctg}\angle OAM = \sqrt{3} \cdot \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3.$$

С другой стороны, по свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки, имеем:

$$AK = AM,\ BL = BK = AB - AK = AB - AM,\ CL = CM = AC - AM$$

и тогда из равенства

$$BC = BL + CL = (AB - AM) + (AC - AM)$$

находим:

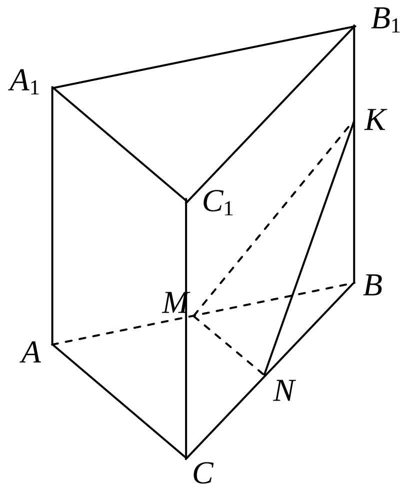
$$AM = \frac{AB + AC - BC}{2} = p - BC,$$

где p – полупериметр треугольника ABC и, поскольку $AM = 3,\ BC = 7$, находим: $p = 10$. Следовательно,

$$S_{ABC} = pr = 10\sqrt{3}.$$

Ответ: $10\sqrt{3}$.

3. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ – заданная правильная призма, MN – средняя линия основания, MKN – заданное сечение. Тогда, поскольку ΔMNB – проекция сечения на плоскость основания. Следовательно,



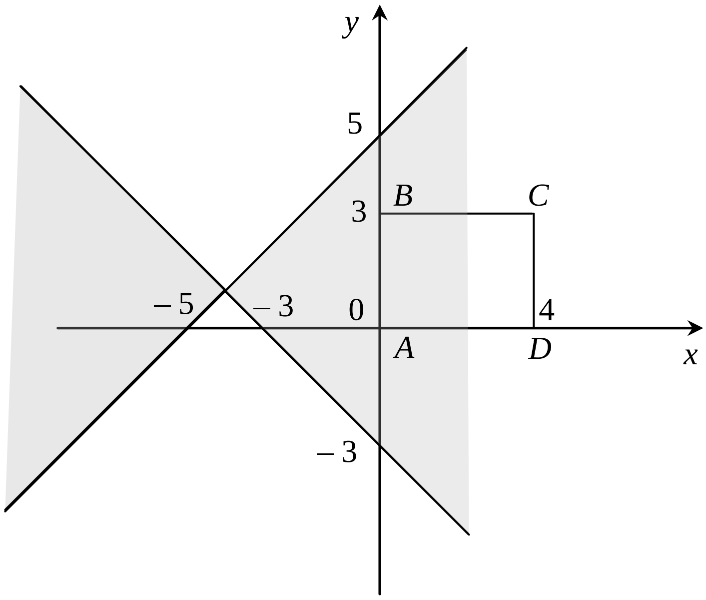
$$S_{MKN} = \frac{S_{MNB}}{\cos\varphi},$$

где φ – угол между плоскостями MKN и MNB. Поскольку MN – средняя линия ΔABC, то $S_{MNB} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{AC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{16\sqrt{3}}{16} = \sqrt{3}$. Следовательно,

$$S_{MKN} = \frac{\sqrt{3}}{\cos 60^\circ} = 2\sqrt{3}.$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

4. Раскрывая модули (метод подобластей), получаем: искомая область является объединением четырех подобластей, удовлетворяющих следующим четырем системам неравенств:



$$\begin{cases} y \ge 1, \\ x \ge -4, \\ y - 1 \le x + 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} y \ge 1, \\ x \le -4, \\ y - 1 \le -x - 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \le 1, \\ x \ge -4, \\ -y + 1 \le x + 4, \end{cases} \qquad \begin{cases} y \le 1, \\ x \le -4, \\ -y + 1 \le -x - 4. \end{cases}$$

Область изображена на рисунке (темным фоном). При этом, как легко видеть, указанный в условии прямоугольник $ABCD$ целиком принадлежит области и поэтому требуемая площадь есть просто площадь прямоугольника, т.е.

$$S = AB \cdot AD = 3 \cdot 4 = 12.$$

Ответ: 12.

Вариант 20 (Решения тестовых заданий)

1. Согласно заданному уравнению графиком является квадратичная парабола с направленными вверх ветвями и вершиной, расположенной в точке с координатами $(1;2)$..

Ответ: 5).

2. На покраску 26 м^2 поверхности потребуется $(26:2)\cdot 0.48 = 6.24$ (кг) краски. Следовательно, после выполнения работ останется $12 - 6.24 = 5.76$ (кг) краски.

Ответ: 4) 5.76.

3. Вычитая из всех частей заданного двойного неравенства $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$, получим неравенство, равносильное исходному:

$$-25\frac{3}{4} < -2x < 2\frac{1}{2} \qquad \text{или} \qquad -\frac{103}{4} < -2x < \frac{5}{2}.$$

Отсюда после деления на -2 находим решение: $-\frac{5}{4} < x < \frac{103}{8}$. Следовательно, наименьшее целое решение есть $x_{\min} = -1$, а наибольшее – $x_{\max} = 12$ и тогда $x_{\min} \cdot x_{\max} = (-1)\cdot 12 = -12$.

Ответ: 4) -12.

4. Количество красных матрешек составило $0.2 \cdot 15 = 3$ (шт.). Следовательно, осталось $15 - 3 = 12$ (шт.) белых и желтых матрешек. При этом белые составляют $0.25 \cdot 12 = 3$ (шт.). Таким образом, желтых матрешек будет $12 - 3 = 9$ (шт.).

Ответ: 5) 9.

5.

$1-2x<\dfrac{4x^2-1}{x^2-3x+2}\Leftrightarrow\dfrac{(4x^2-1)}{x^2-3x+2}+(2x-1)>0\Leftrightarrow\dfrac{(2x-1)(2x+1)+(2x-1)(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)}>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{(2x-1)(2x+1+x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)}>0\Leftrightarrow\dfrac{(2x-1)(x^2-x+3)}{(x-1)(x-2)}>0\Leftrightarrow\dfrac{2x-1}{(x-1)(x-2)}>0.$

Отсюда методом интервалов получаем: $x\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)\cup(2;+\infty)$.

Ответ: 4) $x\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)\cup(2;+\infty)$.

6. $4^{\frac{\log_3 100}{\log_3 10}}+6^{\frac{\log_3 12}{\log_3 6}}=4^{\log_{10}100}+6^{\log_6 12}=4^2+12=16+12=28$.

Ответ: 4)28.

7. Область допустимых значений неравенства определяется неравенством $x+1>0$. Так как на ОДЗ $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=-\log_3(x+1)$ и $2\log_{\sqrt{3}}(x+1)=4\log_3(x+1)$, то неравенство принимает вид

$$4\log_3(x+1)-\log_3(x+1)\geq 1$$

или

$$\log_3(x+1)\geq\frac{1}{3},$$

откуда, потенцируя, получаем: $x\in\left[\sqrt[3]{3}-1;+\infty\right)$.

Ответ: 1) $x\in\left[\sqrt[3]{3}-1;+\infty\right)$.

8. Пусть вначале зарплата составляла c руб. и в первый раз повысилась на p%. Тогда после этого повышения зарплата составит $c_1=c+c\cdot\dfrac{p}{100}=c\cdot\left(1+\dfrac{p}{100}\right)$ (руб.), а после второго повышения (на $2p$%) – $c_2=c_1+c_1\cdot\dfrac{2p}{100}=c_1\cdot\left(1+\dfrac{2p}{100}\right)=c\cdot\left(1+\dfrac{p}{100}\right)\left(1+\dfrac{2p}{100}\right)$ (руб.). Поэтому согласно условию имеем уравнение $c\cdot\left(1+\dfrac{p}{100}\right)\left(1+\dfrac{2p}{100}\right)=\dfrac{15}{8}c$ или $\left(1+\dfrac{p}{100}\right)\left(1+\dfrac{2p}{100}\right)=\dfrac{15}{8}$, откуда $p=25$.

Ответ: 4) 25%.

9.

$\sin 960^\circ\cdot\cos 495^\circ=\sin(900^\circ+60^\circ)\cdot\cos(450^\circ+45^\circ)=(-\sin 60^\circ)\cdot(-\sin 45^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}.$

Ответ: 2) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

10. Если ребро куба равно a, то полная поверхность куба составит $S=6a^2$. Поэтому $6a^2=18$, откуда $a=\sqrt{3}$. Следовательно, диагональ куба будет равна $d=a\sqrt{3}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$.

Ответ: 4) 3.

11. Имеем:

$$2-3\sin 2x=3\sin x-4\cos x \Leftrightarrow 2-6\sin x\cos x-3\sin x+4\cos x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2+4\cos x)-(3\sin x+6\sin x\cos x)=0 \Leftrightarrow 2(1+2\cos x)-3\sin x(1+2\cos x)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1+2\cos x)(2-3\sin x)=0.$$

Таким образом, уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}2\cos x+1=0,\\ 3\sin x-2=0,\end{array}\right.$ каждое из уравнений которой на промежутке $\left[-\frac{\pi}{3};2\pi\right]$ имеет по два корня (при этом все корни различны). Поэтому всего корней будет четыре.

Ответ: 4) 4.

12. Стоимость заказа в первой фирме составит $2.5+0+50\cdot 0.11=8.0$ (руб.), во второй – $0+2.0+(50-10)\cdot 0.16=8.4$ (руб.), в третьей – $1.8+3.0+(50-15)\cdot 0.13=9.35$ (руб.). Таким образом, самый дешевый заказ будет у первого поставщика. Его стоимость – 8 руб.

Ответ: 5) 8.0.

13. Перепишем систему в виде (первое уравнение умножаем на -1, а во втором приводим левую часть к общему знаменателю) $\begin{cases} xy(y-x)=20,\\ \frac{y-x}{xy}=\frac{5}{4}.\end{cases}$ Теперь, вводя новые неизвестные по формулам $\begin{cases} a=y-x,\\ b=xy,\end{cases}$, получаем относительно них систему $\begin{cases} ab=20,\\ \frac{a}{b}=\frac{5}{4}.\end{cases}$ Отсюда, перемножая почленно уравнения, получим: $a^2=25$. Тогда $a=\pm 5$ и, значит, $b=\pm 4$. Таким образом, возвращаясь к исходным неизвестным, имеем два случая:

1) $\begin{cases} y-x=5,\\ xy=4.\end{cases}$

Выражая из первого уравнения y $(y=x+5)$ и подставляя во второе, получаем:

$$x^2+5x-4=0,$$

откуда $x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{41}}{2}$. Следовательно, $y_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{41}}{2}$.

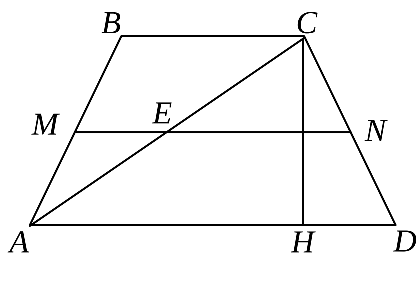
2) $\begin{cases} y-x=-5,\\ xy=-4.\end{cases}$

Действуя аналогично первому случаю, находим: $x_3=1,\ y_3=-4;\ x_4=4,\ y_4=-1$.

Таким образом, наибольшее значение y, удовлетворяющее системе, равно $\frac{5+\sqrt{41}}{2}$.

Ответ: 3) $\frac{5+\sqrt{41}}{2}$.

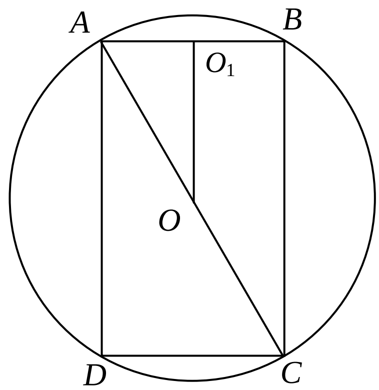
14. Пусть $ABCD$ – заданная равнобедренная трапеция, MN – ее средняя линия. Тогда отрезки ME и EN будут средними линиями в треугольниках ABC и ACD соответственно, и так как $ME=2,\ EN=5$, то по свойству средней линии треугольника $BC=2ME=4$, $AD=2EN=10$. Опустив высоту CH, получаем (для равнобедренной трапеции проекция боковой стороны на большее основание равна полуразности оснований):



$DH = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{10-4}{2} = 3$. Тогда по теореме Пифагора из ΔCHD найдем: $CH = \sqrt{CD^2 - DH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Следовательно, $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot CH = 7 \cdot 4 = 28$.

Ответ: 4) 28.

15. Построив сечение указанной в условии конструкции плоскостью, проходящей через ось вписанного в шар цилиндра, получим прямоугольник $ABCD$ (осевое сечение цилиндра), вписанный в круг (сечение шара, проходящее через его центр O). Опустив перпендикуляр OO_1 из центра O на основание AB, получим: O_1 – центр верхнего основания цилиндра. Поэтому $AO_1 = 3$ и поскольку O – середина диагонали AC, то $OO_1 = \dfrac{1}{2} BC = 5$. Теперь по теореме Пифагора из ΔAOO_1 найдем радиус AO шара: $AO^2 = AO_1^2 + OO_1^2 = 3^2 + 5^2 = 34$. Следовательно, $S = 4\pi AO^2 = 136\pi$.



Ответ: 3) 136π.

Вариант 20

Решения экзаменационных заданий

1. Пусть один первый кран разгружает баржу за x (ч), а второй – за y (ч). Тогда за 1 ч один первый кран разгрузит $\dfrac{1}{x}$ часть баржи, а один второй – $\dfrac{1}{y}$ часть. Следовательно, в первом режиме (когда сначала работали 4 крана первого типа в течение двух часов, выполнив при этом $4 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{8}{x}$ часть всей работы, а затем еще два часа работали эти же четыре крана и еще два крана второго типа, выполнив при этом $3\left(4 \cdot \dfrac{1}{x} + 2 \cdot \dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{12}{x} + \dfrac{6}{y}$ часть всей работы) получаем уравнение $\dfrac{8}{x} + \dfrac{12}{x} + \dfrac{6}{y} = 1$ или $\dfrac{10}{x} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{1}{2}$. Аналогично второй режим (работают вместе четыре крана первого типа и два крана второго типа) дает уравнение $4.5 \cdot \left(4 \cdot \dfrac{1}{x} + 2 \cdot \dfrac{1}{y}\right) = 1$ или $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{9}$. Таким образом, получаем систему

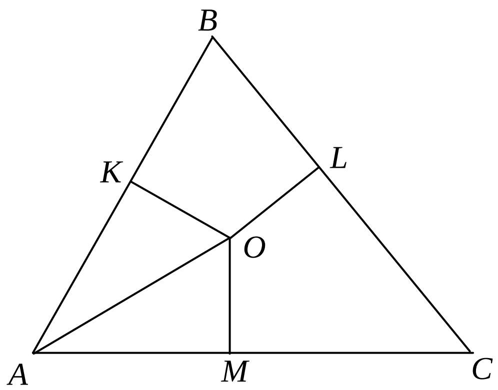
$$\begin{cases} \dfrac{10}{x} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{9}. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения утроенное второе, будем иметь: $\dfrac{4}{x} = \dfrac{1}{6}$, т.е. $x = 24$. Тогда $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{36}$, и, значит, $y = 36$. Таким образом, если вместе будут работать по одному крану первого и второго типа, то за 1 ч они выполнят $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{24}+\frac{1}{36}=\frac{5}{72}$ часть всей работы по разгрузке баржи, а значит, вся баржа будет разгружена за $1:\frac{5}{72}=\frac{72}{5}=14.4$ (ч).

Ответ: за 14.4 часа.

2. Пусть ΔABC – заданный, $\angle A=45°$, O – центр вписанной окружности и K, L, M – точки касания вписанной окружности со сторонами. Прежде всего, из формулы $S_{ABC}=pr$ найдем полупериметр треугольника:

$$p=\frac{S_{ABC}}{r}=18+\sqrt{2}.$$



Далее, поскольку O – центр вписанной окружности и M – точка касания, то, во-первых, AO – биссектриса, и, значит, $\angle OAM=\frac{1}{2}\angle A=22.5°$, а во-вторых, $OM\perp AC$ (как радиус, проведенный в точку касания). Поэтому из прямоугольного ΔAMO имеем:

$$AM=OM\cdot\text{ctg}\angle OAM=1\cdot\text{ctg}\,22.5°=1\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)=\sqrt{2}+1.$$

($ctg\,22.5°$ можно вычислить, например, по формулам половинного угла:

$$\text{ctg}\,22.5°=\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{1-\cos 45°}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\sqrt{2}+1).$$

С другой стороны, по свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки, имеем:

$$AK=AM,\ BL=BK=AB-AK=AB-AM,\ CL=CM=AC-AM$$

и тогда из равенства

$$BC=BL+CL=(AB-AM)+(AC-AM)$$

находим:

$$AM=\frac{AB+AC-BC}{2}=p-BC,$$

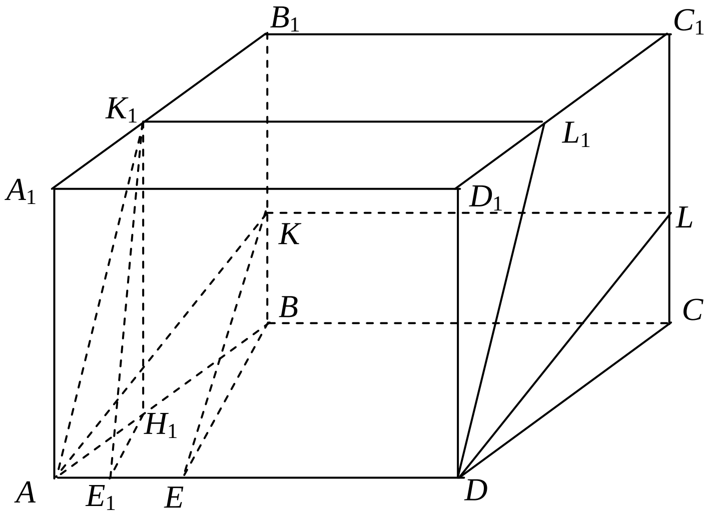
и, значит, $BC=p-AM=18+\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}+1\right)=17$. Теперь, пользуясь следствием из теоремы синусов, имеем:

$$R=\frac{BC}{2\sin\angle A}=\frac{17}{2\sin 45°}=\frac{17}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\frac{17}{\sqrt{2}}$.

3. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – заданная прямая призма: $ABCD$ – ромб, $AD=2$, $\angle A=30°$, $AA_1=1$. Пусть заданное сечение проходит через сторону AD основания и пересекает противоположное боковое ребро, т.е. имеет вид $AKLD$. Поскольку призма прямая, то $KB\perp пл\,ABCD$ и, значит, опустив из точки B перпендикуляр BE на AD, по теореме о трех перпендикулярах получаем: $KE\perp AD$. Следовательно, $\angle KEB=60°$ как линейный угол двугранного угла между плоскостью сечения и плоскостью основания. Тогда в прямоугольном треугольнике ABE $BE=\frac{1}{2}AB=1$ (как катет, лежащий против угла в $30°$) и

из прямоугольного ΔKBE находим: $KB = BE \cdot \operatorname{tg}\angle KEB = 1 \cdot \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.



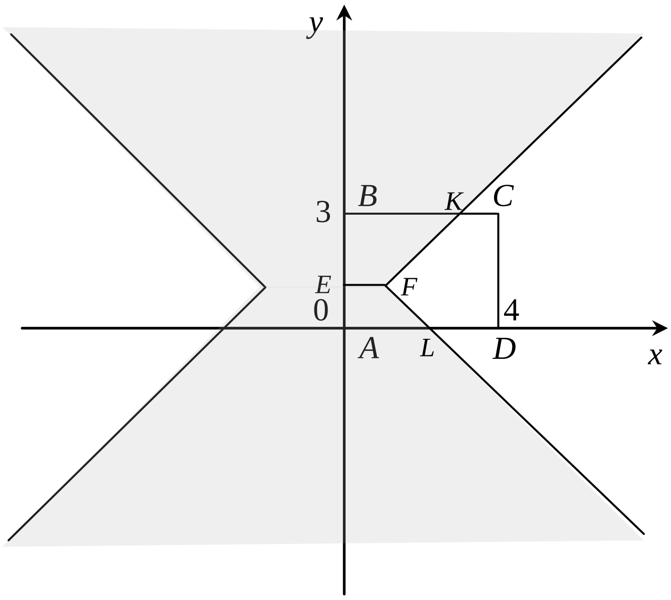
Таким образом, $KB > BB_1$, а это означает, что сечение не пересекает противоположного бокового ребра, т.е. имеет вид AK_1L_1D. Опуская перпендикуляр K_1H_1 на плоскость основания (при этом, так как призма прямая, $H_1 \in AB$) и проводя $H_1E_1 \perp AD$, по теореме о трех перпендикулярах получаем: $K_1E_1 \perp AD$, т.е., во-первых, K_1E_1 – высота параллелограмма AK_1L_1D, а во-вторых, $\angle K_1E_1H_1 = 60°$. Поэтому из прямоугольного треугольника $K_1H_1E_1$ находим: $K_1E_1 = \dfrac{K_1H_1}{\sin\angle K_1E_1H_1} = \dfrac{1}{\sin 60°} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Таким образом, $S_{AK_1L_1D} = AD \cdot K_1E_1 = 2 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

4. Раскрывая модули (метод подобластей), получаем: искомая область является объединением четырех подобластей, удовлетворяющих следующим четырем системам неравенств:

$$\begin{cases} y \le 1, \\ x \ge -1, \\ x+1-1+y \le 2, \end{cases} \quad \begin{cases} y \ge 1, \\ x \ge -1, \\ x+1+1-y \le 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \le 1, \\ x \le -1, \\ -x-1-1+y \le 2, \end{cases} \quad \begin{cases} y \ge 1, \\ x \le -1, \\ -x-1-1+y \le 2. \end{cases}$$



Область изображена на рисунке (темным фоном). При этом, как легко видеть, указанный в условии прямоугольник $ABCD$ в пересечении с данной областью образует фигуру, являющуюся объединением двух прямоугольных трапеций: $BEKF$ и $AEFL$, причем $AE = 1$, $BE = 2$, $EF = 1$, $AL = 2$, $BK = 3$ (сторона FK лежит на прямой $y = x$, а сторона FL – на прямой $y = -x+2$). Поэтому требуемая площадь есть

$$S = S_{BEFK} + S_{AEFL} = \frac{EF+BK}{2} \cdot BE + \frac{EF+AL}{2} \cdot AE = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{11}{2}$.