РЕШЕНИЯ

Вариант 23 (Решения тестовых заданий)

1. Так как $\frac{5}{6}=\frac{20}{24}$, то указанными в условии дробями будут $\frac{21}{24}, \frac{22}{24}$ и $\frac{23}{24}$. Их количество равно трем.

Ответ: 3) 3.

2. Цена билета повысится на $55\cdot 0.2=11$ (коп.). Следовательно, билет будет стоить $55+11=66$ (коп.). Тогда на 6 руб. можно будет купить $600:66=9$ (билетов) (6 коп. при этом останется).

Ответ: 3) 9.

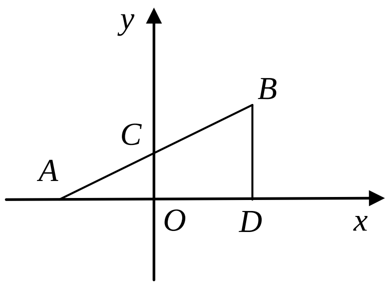
3. Точка принадлежит графику функции, если ее координаты удовлетворяют уравнению, задающему данную функцию. Из указанных в условии точек таковыми являются точки A ($x_A=100,\ y_A=10=\sqrt{100}=\sqrt{x_A}$) и D ($x_D=4,\ y_D=2=\sqrt{4}=\sqrt{x_D}$).

Ответ: 4) A, D.

4. Так как по условию $BD=\frac{3}{7}$, то цена деления числовой оси равна $\frac{3}{7}:3=\frac{1}{7}$. Следовательно, точка C имеет координату, равную 1, а точка D – $\frac{8}{7}$. Поэтому расстояние от точки 1,1 до точки C равно $1.1-1=0.1$, а до точки D – $\frac{8}{7}-1.1=\frac{3}{70}<0.1$. Таким образом, ближайшей к точке 1,1 является точка D.

Ответ: 4) D.

5. Треугольник, площадь которого необходимо вычислить, есть треугольник AOC (здесь O – начало координат). При этом согласно условию имеем: $AO=1$. Найдем CO. Опустив из точки B перпендикуляр BD на ось абсцисс (при этом D имеет координаты $D(1,0)$ и, следовательно, $AD=1-(-1)=2$), получим пару подобных треугольников: AOC и ADB. Отсюда $\frac{OC}{BD}=\frac{AO}{AD}=\frac{1}{2}$. Следовательно, $OC=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}$ и $S_{AOC}=\frac{1}{2}OC\cdot AO=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}=0.25$.

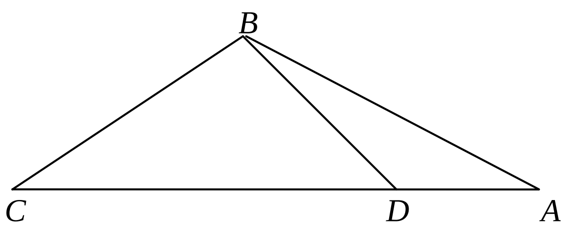


Ответ: 1) 0.25.

6. Так как 1 час содержит 60 минут, то, проезжая каждую минуту 120 м, за час велосипедист проедет $120\cdot 60=7200\ (м)=7.2\ (км)$.

Ответ: 5) 7.2.

7. Треугольники ACB и ABD подобны по двум углам ($\angle A$ общий и $\angle ACB=\angle ABD$ по условию). Поэтому $\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{8}$, откуда $BD=\frac{1}{8}BC=\frac{1}{8}\cdot 6=\frac{3}{4}=0.75$.



Ответ:3) 0.75.

8.

$$1-2x<\frac{4x^2-1}{x^2-3x+2}\Leftrightarrow\frac{(2x-1)(2x+1)}{x^2-3x+2}+(2x-1)>0\Leftrightarrow\frac{(2x-1)(2x+1)+(2x-1)(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(2x-1)(x^2-x+3)}{(x-1)(x-2)}>0\Leftrightarrow\frac{(2x-1)}{(x-1)(x-2)}>0.$$

Отсюда методом интервалов получаем: $x\in\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(2;+\infty)$.

Ответ: 4) $x\in\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(2;+\infty)$.

9. Возводя обе части уравнения (неотрицательные!) в квадрат, избавимся от модуля и перепишем уравнение в виде

$$(x^2+2x)^2-1=0.$$

Раскладывая левую часть получившегося уравнения на множители (по формуле разности квадратов), будем иметь:

$$(x^2+2x-1)(x^2+2x+1)=0.$$

Теперь, поочередно приравнивая к нуля сомножители, найдем:

1) $x^2+2x-1=0$, откуда $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$;

2) $x^2+2x+1=0$, откуда $x=-1$.

Ответ: 4) $-1,\ -1-\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}$.

10. Согласно условию задачи, обозначая через b_i i-й член указанной прогрессии, получаем систему уравнений $\begin{cases}b_1+b_2+b_3+b_4=80\\ b_2+b_3+b_4+b_5=240\end{cases}$, которую, используя формулу общего члена геометрической прогрессии, перепишем в виде $\begin{cases}b_1(1+q+q^2+q^3)=80\\ b_1q(1+q+q^2+q^3)=240\end{cases}$. Разделив второе уравнение на первое, будем иметь $q=\frac{240}{80}=3.$ Тогда из первого уравнения найдем $b_1=2$; следовательно, $b_5=b_1q^4=162$ и $b_1+b_5=2+162=164$.

Ответ: 3) 164.

11. Поскольку $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, то уравнение перепишем в виде

$$2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}=0$$

или

$$2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-1\right)=0.$$

Теперь, поочередно приравнивая к нулю сомножители, найдем:

1) $\sin\frac{x}{2}=0$, откуда $x=360^\circ\cdot k,\ k\in Z$;

2) $\sin\frac{x}{2}=1$, откуда $x=180^\circ+720^\circ\cdot k,\ k\in Z$.

Из первой серии указанному в условии промежутку принадлежит $x=360°$, а из второй – $x=180°$. Следовательно, сумма таких корней равна $360°+180°=540°$

Ответ: 3) 540.

12. Пусть взято x *г* 60%-го раствора (и, следовательно, кислоты в нем содержится $0.6x$ *г*) и y *г* 40%-го раствора (и, следовательно, кислоты в нем содержится $0.3y$ *г*). После смешения этих растворов получим 600 *г* раствора, содержащего $600\cdot 0.4=240$ *г* кислоты. Следовательно, получаем систему уравнений $\begin{cases} x+y=600, \\ 0.6x+0.3y=240, \end{cases}$ решая которую, находим: $x=200,\ y=400$.

Ответ: 4) 200 и 400.

13. Прежде всего, отметим, что областью допустимых значений задачи является множество всех вещественных чисел. Поэтому, переписав неравенство в виде

$$\sqrt{4^{x+1}+17}>5-2^x, \tag{1}$$

видим, что любое x, удовлетворяющее условию $5-2^x<0$, т.е. $x>\log_2 5$, является решением задачи. В случае же $5-2^x\ge 0$, возводя обе части неравенства (1) (неотрицательные!) в квадрат, получим неравенство, равносильное ему:

$$4\cdot 2^{2x}+17>25-10\cdot 2^x+2^{2x}$$

или, после приведения подобных,

$$3\cdot 2^{2x}+10\cdot 2^x-8>0.$$

Раскладывая левую часть последнего неравенства на множители (как квадратный трехчлен относительно 2^x), будем иметь:

$$3\left(2^x-\frac{2}{3}\right)\left(2^x+4\right)>0$$

или (поскольку второй сомножитель всегда положителен)

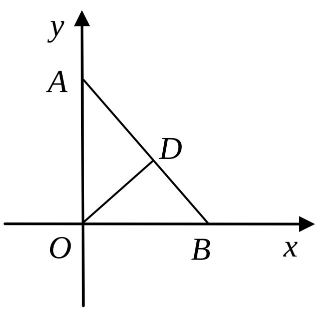
$$2^x-\frac{2}{3}>0.$$

Отсюда $x>\log_2\frac{2}{3}=1-\log_2 3$. Объединяя результаты, получаем:

$$x\in(1-\log_2 3;+\infty).$$

Ответ: 4) $x\in(1-\log_2 3;+\infty)$.

14. Найдем точки пересечения указанной прямой с осями координат. Полагая $x_A=0$, найдем: $y_A=4$, т.е. точка A имеет координаты $A(0;4)$. Аналогично точка пересечения с осью абсцисс имеет координаты $B(3;0)$. Теперь видим, что искомое расстояние есть опущенная на гипотенузу высота OD прямоугольного треугольника AOB. Поскольку



$$S_{AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot OB=\frac{1}{2}AB\cdot OD,$$

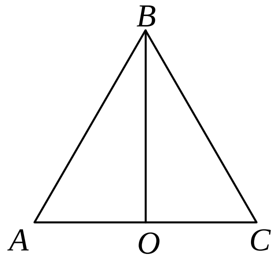
то

$$OD=\frac{AO\cdot OB}{AB}=\frac{3\cdot 4}{5}=2.4,$$

так как по теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{16+9} = 5.$$

Ответ: 4) 2.4.



15. Пусть указанное сечение есть правильный треугольник ABC и BO –его биссектриса (медиана, высота). Поскольку для правильного треугольника имеет место соотношение, связывающее длины стороны и высоты

$$h = a\frac{\sqrt{3}}{2},$$

то получаем

$$AC = BO \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Теперь найдем AO – радиус основания конуса

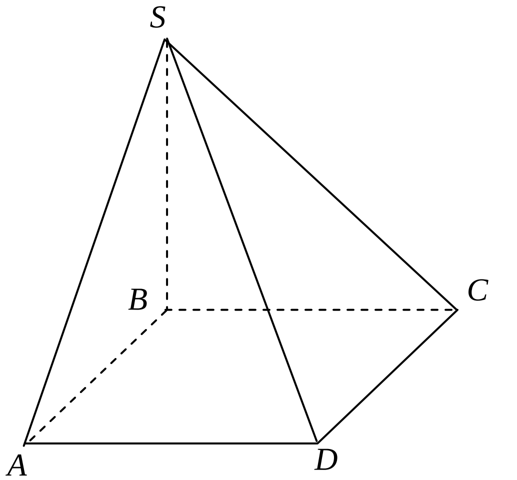
$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

и объем:

$$V_к = \frac{1}{3}\pi \cdot AO^2 \cdot BO = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 4 = \frac{64\pi}{9}.$$

Ответ: 1) $\frac{64\pi}{9}$.

Вариант 23 (Решения экзаменационных заданий)



1. Прежде всего заметим, что две плоскости, перпендикулярные третьей и пересекающие ее по параллельным прямым, параллельны между собой. Поэтому в соответствии с условием перпендикулярными основанию могут быть только две соседние грани пирамиды (пусть, например, это будут грани SAB и SBC.). Тогда их общее ребро SB является перпендикуляром к плоскости основания, т.е. $SB \perp пл. ABCD$. Учитывая, что $ABCD$ – квадрат, по теореме о трех перпендикулярах получаем теперь, что $SA \perp AD$ и $SC \perp CD$. Таким образом, углы SAB и SCB являются линейными углами между плоскостью основания и плоскостями граней SAB и SBC соответственно и, значит, по условию, $\angle SAB = \angle SBC = \alpha$. Следовательно, из прямоугольных треугольников SAB и SBC находим:

$$SA = \frac{AB}{\cos\alpha} = \frac{3}{\frac{3}{5}} = 5 = SC,\; SB = \sqrt{SA^2 - AB^2} = 4.$$

Теперь, поскольку $\Delta SAB = \Delta SBC$ и $\Delta SAD = \Delta SCD$ (по двум катетам), получаем:

$$S_п = 2S_{SAB} + 2S_{SAD} + S_{ABCD} = AB \cdot SB + SA \cdot AD + AB \cdot BC = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 36$$

Ответ: за 6 час.

2. Учитывая неотрицательность корня четной степени, выпишем условие, при котором возможно существование решений: $3\sin x + 2 \ge 0$, т.е. $\sin x \ge -\frac{2}{3}$. При выполнении данно-

го условия возведем обе части уравнения в квадрат, избавляясь таким образом от иррациональности, получим:

$$12\sin x + 13 = 9\sin^2 x + 12\sin x + 4$$

или

$$\sin^2 x = 1.$$

Отсюда, учитывая условие неотрицательности правой части исходного уравнения, имеем:

$$\sin x = 1,$$

т.е.

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Условие $x \in \left(-\frac{9\pi}{2}; -\pi\right]$ теперь дает два решения: $x_1 = -\frac{7\pi}{2},\ x_2 = -\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;\ x_1 = -\frac{7\pi}{2},\ x_2 = -\frac{3\pi}{2}$.

3. Пусть $v\left(\frac{км}{ч}\right)$ – скорость автобуса. Естественным ограничением для величины v сверху является скорость мотоциклиста, т.е. $v < 45$ (иначе мотоциклист никогда не догонит автобус). Тогда:

Во-первых, автобус прибудет в город B спустя $t_A = \frac{100}{v}\ (ч)$;

Во-вторых, через сорок минут после выезда (т.е. на момент старта мотоциклиста) автобус будет находиться на расстоянии $s = \frac{2}{3}v\ (км)$ от города A (и от мотоциклиста). Поэтому, чтобы догнать автобус, мотоциклисту понадобиться время $t_м = \frac{s}{v_м - v_а} = \frac{\frac{2}{3}v}{45 - v} =$ $= \frac{2v}{3(45 - v)}\ (ч)$. Чтобы вернуться в город A, мотоциклисту потребуется еще столько же времени, т.е. $2t_м$.

Теперь можем записать ограничения на величину скорости автобуса. По условию автобус прибывает в город B раньше, чем мотоциклист возвращается в A. Поэтому $t_а - \frac{2}{3} < 2t_м$. С другой стороны, мотоциклист догоняет автобус на его пути в город B. Поэтому $t_а - \frac{2}{3} \geq t_м$. Подставим выражения для $t_а$ и $t_м$ и решим получившиеся неравенства.

1) $\frac{100}{v} - \frac{2}{3} < \frac{4v}{3(45 - v)}$.

Освобождаясь от знаменателя и сокращая на 2, перепишем неравенство в виде

$$v^2 + 195v - 150 \cdot 45 > 0.$$

Отсюда

$$v > 30.$$

2) $\frac{100}{v} - \frac{2}{3} \geq \frac{2v}{3(45 - v)}$.

Аналогично предыдущему получаем:

$$150 \cdot 45 - 195v \geq 0,$$

откуда

$$v \le \frac{450}{13} = 34\frac{8}{13}.$$

Таким образом, $v \in \left(30; 34\frac{8}{13}\right]$.

Ответ: $\left(30; 34\frac{8}{13}\right]$.

4. Разложив левую часть уравнения и знаменатель правой на множители, перепишем уравнение в виде

$$(x-2)(x-5) = \frac{3}{(x-4)(x-7)}.$$

Избавившись от знаменателя (при условии $x \notin \{4, 7\}$), получаем:

$$(x-2)(x-5)(x-4)(x-7) = 3.$$

Теперь, перемножив первую и четвертую и вторую и третью скобки в левой части уравнения, будем иметь:

$$\left(x^2 - 9x + 14\right)\left(x^2 - 9x + 20\right) = 3.$$

Отсюда, вводя новую переменную по формуле $t = x^2 - 9x + 17$, получаем квадратное уравнение

$$(t-3)(t+3) = 3$$

или

$$t^2 = 12.$$

Тогда $t = \pm 2\sqrt{3}$ и, возвращаясь к исходной переменной, получаем два случая:

1) $x^2 - 9x + 17 - 2\sqrt{3} = 0$, откуда $x_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{13 + 8\sqrt{3}}}{2}$;

2) $x^2 - 9x + 17 + 2\sqrt{3} = 0$. Последнее уравнение не имеет вещественных корней, поскольку его дискриминант $D = 13 - 8\sqrt{3}$ отрицателен.

Ответ: $x_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{13 + 8\sqrt{3}}}{2}$

Вариант 24 (Решения тестовых заданий)

1. $\dfrac{1}{3} \cdot 5.8 + \dfrac{1}{3} \cdot 8.3 = \dfrac{5.8 + 8.3}{3} = \dfrac{14.1}{3} = 4.7$.

Ответ: 3) 4.7.

2. Пара шоколадок стоит $2 \cdot 3 = 6$ (руб.). Поэтому за 26 руб. покупатель может оплатить 4 пары шоколадок (2 руб. остается), а получит, благодаря акции, $4 \cdot 3 = 12$ шоколадок.

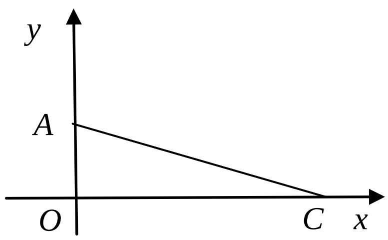
Ответ: 1) 12.

3. Точка принадлежит графику функции, если ее координаты удовлетворяют уравнению, задающему данную функцию. Из указанных в условии точек таковыми являются точки B ($x_B = 2,\ y_B = 6 = 10 - 2 \cdot 2 = 10 - 2x_B$) и E ($x_E = 1,\ y_E = 8 = 10 - 2 \cdot 1 = 10 - 2x_E$).

Ответ: 5) B, E.

4. Так как по условию координата точки A равна $\frac{10}{9}$, то цена деления числовой оси равна $\frac{10}{9} : 10 = \frac{1}{9}$. Следовательно, числу 1 соответствует точка B.

Ответ: 2) B.



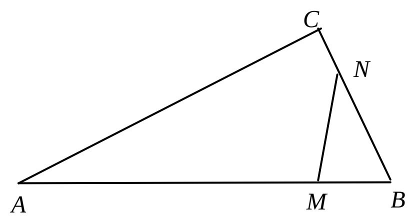
5. Треугольник, площадь которого необходимо вычислить, есть треугольник AOC. Здесь O – начало координат, а AC – заданная прямая. Будем искать ее уравнение в виде $y = kx + b$. При этом, поскольку AC параллельна прямой $y = -0.25x - 1$, то $k = -0.25 = -\frac{1}{4}$, а так как прямая проходит через точку $B(8;2)$, то, подставляя координаты последней в уравнение, получаем: $2 = -\frac{1}{4} \cdot 8 + b$, откуда $b = 4$. Следовательно, уравнение прямой есть $y = -\frac{1}{4}x + 4$. Найдем координаты точек ее пересечения с осями. Полагая $x_A = 0$, получаем: $y_A = 4$. Аналогично $y_B = 0$ и $x_A = 16$. Таким образом, ΔAOC – прямоугольный с катетами $AO = 4,\ OB = 16$. Тогда

$$S_{AOC} = \frac{1}{2} OB \cdot AO = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 4 = 32.$$

Ответ: 3) 32.

6. Так как 1 час содержит 3600 секунд, а 1 км – 1000 м, то, проезжая каждый час 1200 км, за секунду самолет пролетит $\frac{1200 \cdot 1000}{3600} = \frac{1000}{3} = 333\frac{1}{3}\left(\frac{м}{сек}\right)$.

Ответ: 5) $333\frac{1}{3}$.



7. Треугольники ACB и NMB подобны по двум углам ($\angle B$ общий и $\angle CAB = \angle MNB$ по условию). Поэтому $\frac{MN}{AC} = \frac{BN}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, откуда $MN = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 9 = 4.5$.

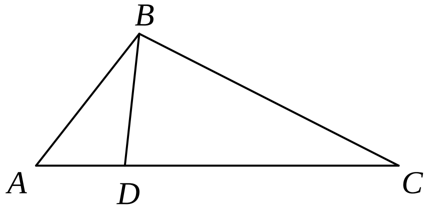
Ответ: 3) 4.5.

8. $$x(x-4) \le \frac{25}{x^2 - 4x} \Leftrightarrow \frac{(x^2 - 4x)^2 - 25}{x^2 - 4x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - 4x - 5)(x^2 - 4x + 5)}{x(x-4)} \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-5)(x^2 - 4x + 5)}{x(x-4)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-5)}{x(x-4)} \le 0.$$

Отсюда методом интервалов получаем: $x \in [-1;0) \cup (4;5]$.

Ответ: 4) $[-1;0) \cup (4;5]$.

9. Раскрывая модули на промежутках (при этом $\lg x$ рассматриваем как новую переменную), имеем:



1) $\lg x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. Тогда уравнение принимает вид

$$-3\lg x - 1 + \lg x - 3 = 2 .$$

Отсюда $\lg x = -3$ (принадлежит рассматриваемому промежутку) и, значит, $x_1 = 0.001$;

2) $\lg x \in \left[-\frac{1}{3}; 3\right]$. Тогда уравнение принимает вид

$$3\lg x + 1 + \lg x - 3 = 2 .$$

Отсюда $\lg x = 1$ (принадлежит рассматриваемому промежутку) и, значит, $x_2 = 10$;

3) $\lg x \in (3; +\infty)$. Тогда уравнение принимает вид

$$3\lg x + 1 - \lg x + 3 = 2 .$$

Отсюда $\lg x = -1$. Поскольку найденное значение не принадлежит рассматриваемому промежутку, то на этом промежутке корней нет.

В ответ даем $x_1 + x_2 = 0.001 + 10 = 10.001$.

Ответ: 1) 10.001.

10. Пусть прогрессия содержит $2n$ членов, b_1 - первый член прогрессии, q - ее знаменатель. Заметим, что члены прогрессии, стоящие на нечетных местах, в свою очередь также образуют прогрессию со знаменателем q^2. Получаем уравнение

$$\frac{b_1\left(q^{2n} - 1\right)}{q - 1} = \frac{3b_1\left(\left(q^2\right)^n - 1\right)}{q^2 - 1} .$$

Очевидно, что $b_1 \neq 0,\ q \neq 1$.После сокращения получим $1 = \frac{3}{q+1}$ $\quad q = 2$.

Ответ: 3) 2.

11. Применяя формулу синуса двойного угла, перепишем уравнение в виде

$$2\sin 6x + \sin 6x \cos\frac{x}{3} = 0$$

или, раскладывая на множители,

$$\left(\cos\frac{x}{3} + 2\right)\sin 6x = 0 .$$

Отсюда $\sin 6x = 0$ и $x = 30^\circ \cdot n,\ n \in Z$.

Из данной серии указанному в условии промежутку принадлежат $x = 30^\circ, x = 60^\circ$ и $x = 90^\circ$. Сумма таких корней равна $30^\circ + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Ответ: 2) 180.

12. Пусть цена снижалась каждый раз на p %. Тогда после первого снижения она стала $600 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ $(руб.)$, а после второго – $600 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right) = 600 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2$ $(руб.)$.

Таким образом, имеем уравнение

$$600 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = 384 ,$$

откуда

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)^2=\frac{64}{100} \Leftrightarrow 1-\frac{p}{100}=\frac{8}{10},$$

и, таким образом, $p=20$.

Ответ: 4) 20%.

13. Прежде всего, отметим, что областью допустимых значений задачи является множество чисел, удовлетворяющих неравенству $2^x-7\ge 0$, т.е. $2^x\ge 7$. При этом, если x удовлетворяет также и условию $9-2^x<0$, т.е. $2^x>9$, то оно является решением задачи. В случае же $9-2^x\ge 0$, возводя обе части неравенства (неотрицательные!) в квадрат, получим неравенство, равносильное исходному:

$$2^x-7>81-18\cdot 2^x+2^{2x}$$

или, после приведения подобных,

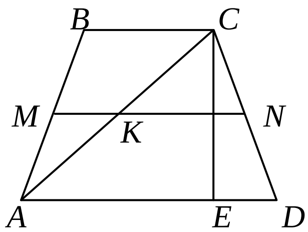
$$2^{2x}-19\cdot 2^x+88<0.$$

Раскладывая левую часть последнего неравенства на множители (как квадратный трехчлен относительно 2^x), будем иметь:

$$\left(2^x-8\right)\left(2^x-11\right)<0,$$

Откуда с учетом рассматриваемого ограничения на аргумент $\left(2^x\le 9\right)$ находим: $2^x\in(8;9]$. Объединяя оба случая, имеем: решениями являются все значения x, удовлетворяющие условию $2^x\in(8;+\infty)$, т.е. $x\in(3;+\infty)$.

Ответ: 4) $(3;+\infty)$.



14. Так как средняя линия трапеции параллельна основаниям, то ее отрезки MK и KE являются средними линиями в треугольниках ABC и ACD соответственно. Следовательно, $BC=2MK=4$, $AD=2KN=10$. Проведя высоту CE, получаем: для равнобедренной трапеции проекция боковой стороны на большее основание равна полуразности оснований, т.е. $ED=\frac{AD-BC}{2}=3$. Теперь по теореме Пифагора из треугольника CED находим высоту:

$$CE=\sqrt{CD^2-ED^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4.$$

Таким образом,

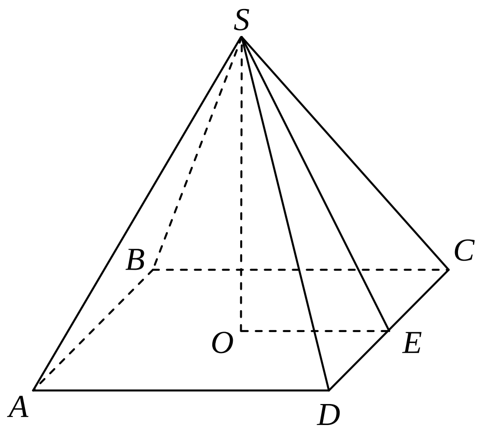
$$S_{ABCD}=MN\cdot CE=(2+5)\cdot 4=28.$$

Ответ: 4) 28.

15. Поскольку для диагонали куба справедливо соотношение $d=a\sqrt{3}$, где a – длина ребра, то имеем: $\sqrt{3}=a\sqrt{3}$, откуда $a=1$ и, следовательно, $V=a^3=1$.

Ответ: 1) 1.

Вариант 24 (Решения экзаменационных заданий)



1. Пусть $SABCD$ – заданная пирамида, SO – ее высота (тогда точка O есть центр квадрата $ABCD$), SE а – апофема (и тогда точка E – середина стороны CD квадрата $ABCD$). Боковые грани правильной пирамиды являются равнобедренными треугольниками, а поскольку по условию плоский угол при вершине пирамиды равен $60°$, то эти треугольники будут равносторонними. Следовательно, положив сторону квадрата, лежащего в основании пирамиды, равной a, получим: $SE = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ (как высота правильного треугольника со стороной a), $OE = \frac{a}{2}$ (поскольку O – центр квадрата, а E – середина его стороны). Применяя к треугольнику SOE теорему Пифагора, можем записать:

$$8 = SO^2 = SE^2 - OE^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2},$$

откуда $a = 4$ и, следовательно,

$$SE = a\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

2. Учитывая неотрицательность корня четной степени, выпишем условие, при котором возможно существование решений: $-\cos x \geq 0$, т.е. $\cos x \leq 0$. При выполнении данного условия возведем обе части уравнения в квадрат, избавляясь таким образом от иррациональности, получим:

$$7\sin x - \cos 2x = 4\cos^2 x$$

Преобразуя косинус двойного угла и квадрат косинуса к синусам, перепишем уравнение в виде

$$7\sin x - \left(1 - 2\sin^2 x\right) = 4\left(1 - \sin^2 x\right)$$

или

$$6\sin^2 x + 7\sin x - 5 = 0.$$

Корни этого квадратного относительно $\sin x$ уравнения равны $-\frac{5}{3}$ и $\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

Из двух серий решений последнего уравнения $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ и $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$, выбираем вторую, поскольку на первой серии косинус положителен.

Таким образом,

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Условие $x \in \left[-\frac{7\pi}{2}; -\pi\right)$ теперь дает два решения: $x_1 = -\frac{19\pi}{6},\ x_2 = -\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z;\ x_1 = -\frac{19\pi}{6},\ x_2 = -\frac{7\pi}{6}$.

3. Пусть при составлении нового сплава взято x кг первого сплава, y кг второго и z кг третьего. Тогда масса нового сплава будет равна $x+y+z$ (кг), и этот сплав будет содержать $0.1y+0.3z$ (кг) висмута (таким образом, процентное содержание висмута будет равно $P_1=\dfrac{0.1y+0.3z}{x+y+z}\cdot 100=\dfrac{10y+30z}{x+y+z}$) и $0.55x+0.5y+0.7z$ (кг) свинца (таким образом, процентное содержание свинца будет равно $P=\dfrac{0.55x+0.5y+0.7z}{x+y+z}\cdot 100=\dfrac{55x+50y+70z}{x+y+z}$).

Согласно условию задачи $P_1=15$, т.е.

$$\frac{10y+30z}{x+y+z}=15,$$

откуда

$$y=3(z-x).$$

Учитывая, что все величины x, y, z неотрицательны, получаем также условие $z\ge x$.
Используя полученные соотношения, исключим y из выражения для P. Получим:

$$P=\frac{55x+50\cdot 3(z-x)+70z}{x+3(z-x)+z}=\frac{220z-95x}{4z-2x}=55+\frac{15x}{4z-2x}.$$

Учитывая неотрицательность x и z, видим, что $P\ge 55$ (равенство достигается при $x=0$).
При $x>0$, сократив последнюю дробь на x, перепишем выражение для P в виде

$$P=55+\frac{15}{4u-2},$$

где $u=\dfrac{z}{x}\ge 1$. Поскольку функция от переменной u, стоящая справа, монотонно убывает по u в указанном промежутке, то наибольшее ее значение достигается при $u=1$, т.е.

$$P\le 55+\frac{15}{4\cdot 1-2}=62.5.$$

Таким образом, $P\in[55;62.5]$.

Ответ: $[55;62.5]$.

4. Перепишем уравнение в виде

$$(x+2)^2+8x=6\sqrt{x}(x+2),$$

получив, таким образом, однородное уравнение второго порядка относительно переменных $x+2$ и $\sqrt{x}$. Поэтому, разделив уравнение почленно на x, получим:

$$\left(\frac{x+2}{\sqrt{x}}\right)^2-6\left(\frac{x+2}{\sqrt{x}}\right)+8=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$, находим:

1) $\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}=2$ или $x-2\sqrt{x}+2=0$.

Это уравнение как квадратное относительно величины $\sqrt{x}$ не имеет вещественных корней.

2) $\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}=4$ или $x-4\sqrt{x}+2=0$.

Отсюда $\sqrt{x}=2\pm\sqrt{2}$ и, значит, $x=\left(2\pm\sqrt{2}\right)^2=6\pm 4\sqrt{2}$.

Ответ: $6\pm 4\sqrt{2}$.