РЕШЕНИЯ

Вариант 25 (Решения тестовых заданий)

1. Согласно заданному уравнению графиком является квадратичная парабола с направленными вверх ветвями, ее вершина расположена в точке с координатами (-1; -4).

Ответ: 3).

2. Решая уравнение $n + (n + 1) + 41 = n\,(n + 1)$ получаем ответ.

Ответ: 4) 113.

3. Условие задачи равносильно двойному неравенству $-4 \le 12 + 16x < 0$, откуда $x \in [-1; -0.75)$.

Ответ: 1) $[-1; -0.75)$.

4. До подорожания можно купить 11 банок краски. После подорожания на 15% банка краски будет стоить $1.8 + 1.8 \cdot 0.15 = 2.07$ (руб.). Следовательно, 9 банок краски обойдутся в $2.07 \cdot 9 = 18.63$ (руб.). Таким образом, на 20 руб. можно будет купить только 9 банок краски.

Ответ: 3) на 2 банки.

5. Обозначим предварительно $a = x^2 + x + 1$. Получаем $2a - 1 = \frac{15}{a}$.

Тогда a= -2.5 или a=3.

Далее решаем уравнение $3 = x^2 + x + 1$.

Ответ: 2) -1.

6. $\log_a \frac{\sqrt[3]{b}}{a} + \log_b \frac{\sqrt[3]{a}}{b} = \frac{1}{3}\log_a b - 1 + \frac{1}{3}\log_b a - 1 = \frac{1}{18}$.

Ответ: 4) $\frac{1}{18}$.

7. 6. Так как 1 час содержит 3600 секунд, а 1 км – 1000 м, то, проезжая каждый час 900 км, за секунду самолет пролетит $\frac{900 \cdot 1000}{3600} = \frac{1000}{4} = 250\left(\frac{м}{сек}\right)$.

Ответ: 5) 25.

.

8. Пусть вначале стоимость книги составляла c руб. и в первый раз повысилась на p %. Тогда после этого повышения стоимость книги составит $c_1 = c + c \cdot \frac{p}{100} = c \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ (руб.), а после второго повышения (на $2p$ %) –

$c_2 = c_1 + c_1 \cdot \frac{2p}{100} = c_1 \cdot \left(1 + \frac{2p}{100}\right) = c \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{2p}{100}\right)$ (руб.). Поэтому согласно условию имеем уравнение $c \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{2p}{100}\right) = \frac{15}{8}c$ или $\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{2p}{100}\right) = \frac{15}{8}$, откуда $p = 25$.

Ответ: 5) 25%.

9. Преобразуем заданное выражение, используя принцип вспомогательного аргумента:

$$3 + 4\sin x - 3\cos x = 3 + \sqrt{4^2 + 3^2}\sin(x - \alpha) = 3 + 5\sin(x - \alpha),$$

где $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Теперь очевидно, что максимальное значение рассматриваемого выражения равно $3 + 5 = 8$.

Ответ: 2) 8.

10. Если ребро куба равно a, то полная поверхность куба составит $S = 6a^2$. Поэтому $6a^2 = 24$, откуда $a = 2$. Следовательно, диагональ куба будет равна $d = a\sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3}$.

Ответ: 4) $2\sqrt{3}$.

11. Выполним цепочку эквивалентных преобразований: $2 - \sin 2x - 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x(\sin x - \cos x) = 0$. Отсюда имеем два случая: а) $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k,\ k \in Z$ и, учитывая ограничение, $x_1 = -2\pi$; б) $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1$, т.е. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$ и $x_2 = -\frac{7\pi}{4}$. Таким образом, $S = -\frac{15\pi}{4}$.

Ответ: 1) $-\frac{15\pi}{4}$.

12. Стоимость покупки с доставкой у первого поставщика составит $10 \cdot 30 + 16 = 316$ (руб.), у второго – $11 \cdot 30 = 330$ (руб.) (так как заказ больше 100 руб., то доставка бесплатно), у третьего – $10{,}5 \cdot 30 + 15 = 330$ (руб.). Таким образом, самый дешевый заказ будет у первого поставщика. Его стоимость – 316 руб.

Ответ: 1) 316 руб.

13. Сложив два уравнения, получаем:

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 0$$

или

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 0.$$

Отсюда имеем $x = -1$ и $y = -1$

Ответ: 4) -1.

14. Опустим из точки A перпендикуляр AB на плоскость Oxy и из основания B этого перпендикуляра опустим перпендикуляр BC на прямую $y = 2$ плоскости Oxy. Тогда по теореме о трех перпендикулярах AC есть перпендикуляр к прямой $y = 2$ плоскости Oxy, и его длина есть искомое расстояние. По теореме Пифагора

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Ответ: 1) $\sqrt{13}$.

15. Проекция заданного бокового ребра призмы на катеты отсекает от катетов основания отрезки длиной 5 и $5\sqrt{2}$, соответственно. Длина диагонали прямоугольника с такими сторонами равна $5\sqrt{3}$. Это и есть длина проекции рассматриваемого бокового ребра призмы на плоскость основания призмы. Тогда высота призмы равна $\sqrt{100-75} = 5$, а ее объем -равен $\frac{1}{2}(11\cdot 8)\cdot 5 = 220$.

Ответ: 2) 220.

Вариант 25

Решения экзаменационных заданий

1. ОДЗ задачи определяется неравенством $x \ge -1$. Любое значение из ОДЗ, при котором правая часть неравенства неположительна (т.е. $x \le 3$), будет решением. При $x > 3$ обе части неравенства положительны. Поэтому избавимся от иррациональности, возводя обе его части в квадрат. В итоге получим:

$$2(x+1) \ge (x-3)^2$$

или

$$x^2 - 8x + 7 \le 0.$$

Тогда $x \in [1;7]$ или, учитывая ограничение $x > 3$, $x \in (3;7]$. Объединяя полученные результаты, имеем: $x \in [-1;7]$.

Ответ: $x \in [-1;7]$.

2. Пусть $v\left(\frac{км}{ч}\right)$ – собственная скорость лодки, $v_T\left(\frac{км}{ч}\right)$с – скорость течения. Тогда скорость движения лодки по течению составит $v+v_T\left(\frac{км}{ч}\right)$, а против течения – $v-v_T\left(\frac{км}{ч}\right)$. Следовательно, на основании условий задачи получаем систему уравнений (временные единицы переводим в часы)

$$\begin{cases} \dfrac{18}{v+v_T} + \dfrac{18}{v-v_T} = \dfrac{7}{4}, \\ \dfrac{6}{v-v_T} - \dfrac{6}{v+v_T} = \dfrac{1}{12}. \end{cases}$$

Решая эту систему как линейную относительно величин $\frac{1}{v+v_T}$ и $\frac{1}{v-v_T}$, находим:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{v-v_T} = \dfrac{1}{18}, \\ \dfrac{1}{v+v_T} = \dfrac{1}{24}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} v + v_T = 24, \\ v - v_T = 18 \end{cases}$$

и

$$v = 21\left(\frac{км}{ч}\right).$$

Ответ: $v = 21\left(\frac{км}{ч}\right)$

3. Прежде всего заметим, что прямые, указанные в условии задачи, взаимно перпендикулярны. Поэтому точка их пересечения A является одной из вершин прямоугольника. Найдем ее координаты, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x - 3y + 6 = 0, \\ 3x + y - 12 = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x_A = 3, \\ y_A = 3. \end{cases}$$

Поскольку в точке пересечения диагонали прямоугольника делятся пополам, то точка E является серединой отрезка AC, где – вершина прямоугольника, противоположная A, и, следовательно, та вершина прямоугольника, которая является точкой пересечения искомых прямых. Вычислим ее координаты, пользуясь формулой деления отрезка пополам:

$$x_E = \frac{x_A + x_C}{2},\ \ y_E = \frac{y_A + y_C}{2}$$

или

$$7 = \frac{3 + x_C}{2},\ \ 2 = \frac{3 + y_C}{2}.$$

Следовательно, $x_C = 11,\ \ y_C = 1$. Остается провести через точку C прямые, параллельные указанным в условии. Условие параллельности дает нам основание сохранить коэффициенты при переменных. Условие прохождения через заданную точку можно реализовать, непосредственно вставив координаты этой точки в уравнение, т.е. рассматривать уравнение в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Таким образом, уравнение первой прямой будет

$$3(x - x_C) + (y - y_C) = 0$$

или

$$3(x - 11) + (y - 1) = 0 \ \Leftrightarrow\ 3x + y - 34 = 0,$$

а второй

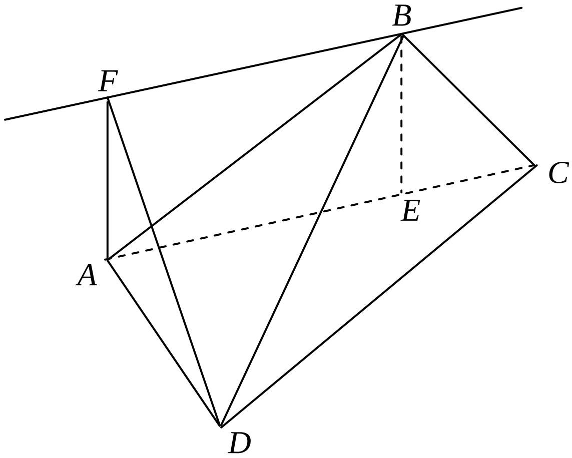
$$(x - x_C) - 3(y - y_C) = 0,$$

т.е.

$$(x - 11) - 3(y - 1) = 0 \ \Leftrightarrow\ x - 3y - 8 = 0.$$

Ответ: $3x + y - 34 = 0$ и $x - 3y - 8 = 0$

4. В плоскости грани ABC проведем через точку B прямую параллельно AC, а через точку A – перпендикуляр к AC. Обозначим F точку пересечения этих прямых. По условию $\angle FAD = \dfrac{\pi}{4}$. Пусть точка E – основание перпендикуляра, опущенного из B на AC. Из прямоугольного треугольника ABE, где $AB = 2$, а $\angle BAE = \dfrac{\pi}{6}$, находим $BE = 1$, $AE = \sqrt{3}$.



Из треугольника AFD, в котором $AD = \sqrt{2}$, $AF = BE = 1$, по теореме косинусов имеем

$$FD^2 = 1 + 2 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1,$$

т.е. $FD = 1$.

Прямая AC перпендикулярна плоскости AFD (так как $AF \perp AC$ и $AD \perp AC$), поэтому $FD \perp AC$. Но $FB \parallel AC$, следовательно, $BF \perp FD$. Тогда из прямоугольного треугольника DFB, где $FB = AE = \sqrt{3}$, находим $BD = 2$

Ответ: 2.