# РЕШЕНИЯ

## Вариант 27 (Решения тестовых заданий)

1. Во время распродажи при скидке 15% флакон герметика будет стоить $18\cdot 0{,}85=15{,}3$ (руб.). Следовательно, на 100 руб. можно будет купить $100:15{,}3=6{,}5...$, т.е. 6 флаконов.

Ответ: 3) 6.

2. Обозначив числитель дроби через $x\in N$, получаем для его определения неравенство $\frac{5}{6}<\frac{x}{24}<1$, откуда $20<x<24$, и так как $x\in N$, то таких дробей будет всего три: с числителями 21, 22 и 23.

Ответ: 3) 3.

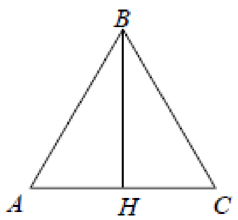
3. Вычитая из всех частей заданного двойного неравенства $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$, получим неравенство, равносильное исходному:

$$-25\frac{3}{4}<-3x<4\frac{1}{2} \quad \text{или} \quad -\frac{103}{4}<-3x<\frac{9}{2}.$$

Отсюда после деления на $-3$ находим решение: $-\frac{3}{2}<x<\frac{103}{12}$. Следовательно, наименьшее целое решение есть $x_{\min}=-1$, а наибольшее – $x_{\max}=8$ и тогда $x_{\min}\cdot x_{\max}=(-1)\cdot 8=-8$.

Ответ: 4) $-8$.

4. Так как $\cos A=\frac{12}{13}$, то $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{5}{13}$ и $\operatorname{ctg} A=\frac{12}{5}$. Тогда из треугольника $AHB$ получаем: $AH=\frac{1}{2}AC=BH\operatorname{ctg}A=16\cdot\frac{12}{5}=38.4$, т.е. $AC=76.8$.




Ответ: 2) 76.8.

5. $$x(x-4)\le\frac{25}{x^2-4x}\Leftrightarrow(x^2-4x)-\frac{25}{x^2-4x}\le 0\Leftrightarrow\frac{(x^2-4x)^2-25}{x(x-4)}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{(x^2-4x-5)(x^2-4x+5)}{x(x-4)}\le 0\Leftrightarrow\frac{(x-5)(x+1)}{x(x-4)}\le 0$$

Отсюда методом интервалов получаем: $x\in[-1;0)\cup(4;5]$.

Ответ: 4) $x\in[-1;0)\cup(4;5]$.

6. Возводя данные положительные числа в квадрат и упорядочивая их, получаем: $16<17<20$. Поэтому $4<\sqrt{17}<2\sqrt{5}$.

Ответ: 5) $4<\sqrt{17}<2\sqrt{5}$.

7. Область допустимых значений неравенства определяется неравенством $x>0$. Так как на ОДЗ $\log_{\frac{1}{4}}x^2=-2\log_4 x$, то неравенство принимает вид

$$\log_4 x-2\log_4 x\ge 0$$

или

$$\log_4 x\le 0,$$

откуда, потенцируя, с учетом ОДЗ получаем: $x\in(0;1]$.

Ответ:1) $x\in(0;1]$.

8. $\begin{cases} x^2 \geq 9, \\ (x+7)(3-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+3) \geq 0, \\ (x+7)(x-3) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-7;-3] \cup \{3\}$. Тогда сумма целых решений есть $S = -7-6-5-4-3+3 = -22$.

Ответ: 2) $-22$.

9. $\dfrac{\sin 18\alpha}{\sin 6\alpha} - \dfrac{\cos 18\alpha}{\cos 6\alpha} = \dfrac{\sin 18\alpha \cos 6\alpha - \cos 18\alpha \sin 6\alpha}{\sin 6\alpha \cos 6\alpha} = \dfrac{2\sin(18\alpha - 6\alpha)}{\sin 12\alpha} = 2$.

Ответ: 3) 2.

10. $a\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1} + b\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1} = \dfrac{2ab\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \dfrac{2ab\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = 2ab$.

Ответ: 5) $2ab$.

11. Имеем:

$3 + 6\sin 2x = -9\sin x - 4\cos x \Leftrightarrow 3 + 12\sin x\cos x + 9\sin x + 4\cos x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (3 + 4\cos x) + (9\sin x + 12\sin x\cos x) = 0 \Leftrightarrow (3 + 4\cos x) + 3\sin x(3 + 4\cos x) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (3 + 4\cos x)(1 + 3\sin x) = 0.$

Таким образом, уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} 4\cos x + 3 = 0, \\ 3\sin x + 1 = 0, \end{array}\right.$ каждое из уравнений которой на промежутке $\left[-2\pi; \dfrac{\pi}{6}\right]$ имеет по два корня (при этом все корни различны). Поэтому всего корней будет четыре.

Ответ: 4) 4.

12. Оставим в левой части уравнения только логарифм и пропотенцируем получившееся уравнение. Получим: $6 \cdot 8^x - 1 = 8^{2x+1}$ или $8 \cdot 8^{2x} - 6 \cdot 8^x + 1 = 0$. Решая получившееся уравнение как квадратное относительно $8^x$, находим: $8^x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\dfrac{1}{3}$ или

$8^x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x_2 = -\dfrac{2}{3}$. Тогда $x1 + x_2 = -1$.

Ответ: 1) -1.

13. Область допустимых значений задачи определяется условиями $x \neq \pm y$. Освобождаясь на ОДЗ от знаменателя в первом уравнении, получаем:

$$(x+2y)(x+y) + (x-2y)(x-y) - 4(x-y)(x+y) = 0$$

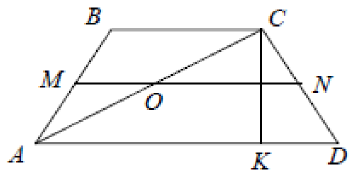
или (после приведения подобных)

$$-2x^2 + 8y^2 = 0.$$

Отсюда имеем два случая: $x = 2y$ или $x = -2y$. В первом из них второе уравнение перепишется в виде $7y^2 = 21$, откуда $y = \pm\sqrt{3}$ и тогда $x = \pm 2\sqrt{3}$, а во втором – $3y^2 = 21$, откуда $y = \pm\sqrt{7}$ и, значит, $x = \mp 2\sqrt{7}$. Таким образом, наименьшее значение $x$, удовлетворяющее системе, равно $-2\sqrt{7}$.

Ответ: 4) $-2\sqrt{7}$.

14. Так как $MN$ – средняя линия, то сразу находим основания трапеции: $AD = 2ON = 10$, $BC = 2OM = 4$. Теперь по теореме Пифагора, проведя высоту $CK$, имеем: $CK = \sqrt{CD^2 - KD^2}$ и так как $KD = \dfrac{AD - BC}{2} = 3$, то $CK = 4$ и $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot CK = 28$.



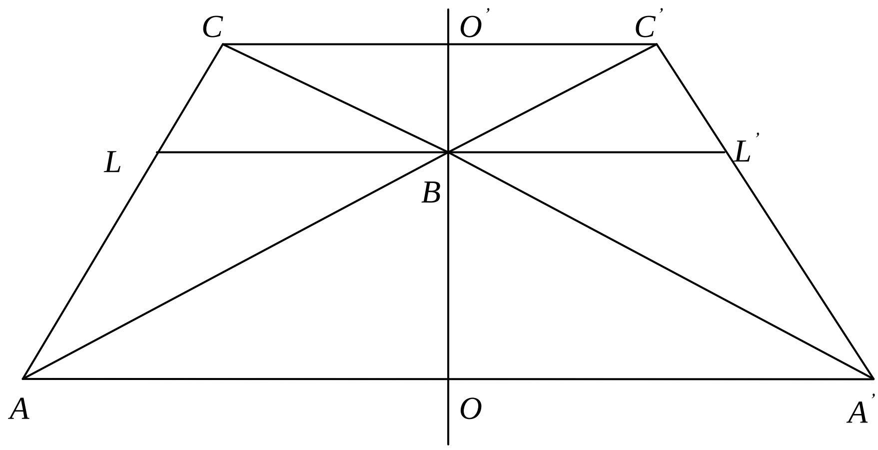

Ответ: 4) 28.

15. Поскольку сфера второго шара внутренним образом касается сферы первого шара и содержит центр первого шара, то, учитывая, что точка касания сфер находится на линии их центров, получаем: диаметр второго шара равен радиусу первого, а значит, площадь поверхности второго шара в 4 раза меньше, т.е. равна $160\pi : 4 = 40\pi$.

Ответ: 2) $40\pi$.

## Вариант 27

## Решения экзаменационных заданий




1. Пусть $ABC$ – заданный треугольник: $BC = 2$, $\angle ABC = 60°$, $LL'$ – биссектриса $\angle ABC$, $OO'$ – ось вращения. Тогда объем тела вращения (на рисунке изображено его осевое сечение) можно вычислить как разность между объемом усеченного конуса с радиусами оснований $OA$ и $O'C$ и суммой объемов конусов, осевые сечения которых – треугольники $CBC'$ и $ABA'$. При этом $AB = 2BC = 4$ (так как $\angle CAB = 30°$). Аналогично получаем: $BO = \dfrac{1}{2}AB = 2$, $BO' = \dfrac{1}{2}BC = 1$, $AO = 2\sqrt{3}$, $CO' = \sqrt{3}$. Далее вычисления по соответствующим формулам объемов дают: $V = 12\pi$.

Ответ: 12π.

2. Перепишем уравнение в виде $\dfrac{x^2}{2x^2 - 1} + 7x + 6(2x^2 - 1) = 0$ или, освобождаясь от знаменателя, $x^2 + 7x(2x^2 - 1) + 6(2x^2 - 1)^2 = 0$. Таким образом, получаем однородное относительно переменных $x$ и $2x^2 - 1$ уравнение второй степени. Дальнейшее решение можно провести, например, так: делим почленно уравнение на $(2x^2 - 1)^2$ и вводим новую переменную

по формуле $t=\dfrac{x}{2x^2-1}$. Получим квадратное уравнение $t^2+7t+6=0$, откуда $t=-1$ или $t=-6$. В первом случае, возвращаясь к исходной переменной, имеем:

$\dfrac{x}{2x^2-1}=-1 \Leftrightarrow 2x^2+x-1=0 \Rightarrow x_1=-1,\ \ x_2=\dfrac{1}{2}$, а во втором

$\dfrac{x}{2x^2-1}=-6 \Leftrightarrow 12x^2+x-6=0 \Rightarrow x_3=\dfrac{2}{3},\ \ x_2=-\dfrac{3}{4}.$ Ответ: $-1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{3}{4}$.

3. Пусть площади участков составляют, соответственно $S_1$, $S_2$ и $S_3$ единиц, а площадь всего поля равна $S$. Тогда из условия задачи получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} S_1+S_2+S_3=S, \\ S_3=\dfrac{S}{4}, \\ \dfrac{1}{2}S_1+\dfrac{3}{4}S_2+S_3=2S_2. \end{cases}$$

Отсюда

$$S_3=\frac{S}{4},\ S_2=\frac{5S}{14},\ S_1=\frac{11S}{28},$$

и, следовательно, вспаханная за день площадь равна $2S_2=\dfrac{5S}{7}$.

Ответ: $\dfrac{5}{7}$.

4. Неравенство равносильно системе $\begin{cases} 2x-1>0, \\ 4-3x\ge 0, \\ 4-3x<(2x-1)^2. \end{cases}$ Последняя преобразуется следующим образом: $\begin{cases} x>\dfrac{1}{2}, \\ x\le\dfrac{4}{3}, \\ 4x^2-x-3>0. \end{cases}$ Отсюда $x\in\left(1;\dfrac{4}{3}\right]$.

Ответ: $x\in\left(1;\dfrac{4}{3}\right]$.