# РЕШЕНИЯ

## Вариант 29 (Решения тестовых заданий)

1. Задачу можно решить, подставляя различные точки в заданную функцию.

Ответ: 3).

2. На покраску 26 м$^2$ поверхности потребуется $(26:2)\cdot 0.48 = 6.24$ (кг) краски. Следовательно, после выполнения работ останется $12 - 6.24 = 5.76$ (кг) краски.

Ответ: 4) 5.76.

3. Вычитая из всех частей заданного двойного неравенства $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$, получим неравенство, равносильное исходному:

$$-25\frac{3}{4} < -2x < 2\frac{1}{2} \quad \text{или} \quad -\frac{103}{4} < -2x < \frac{5}{2}.$$

Отсюда после деления на $-2$ находим решение: $-\frac{5}{4} < x < \frac{103}{8}$. Следовательно, наименьшее целое решение есть $x_{\min} = -1$, а наибольшее – $x_{\max} = 12$ и тогда $x_{\min}\cdot x_{\max} = (-1)\cdot 12 = -12$.

Ответ: 4) $-12$.

4. Количество красных ручек составило $0.2\cdot 15 = 3$ (шт.). Следовательно, осталось $15 - 3 = 12$ (шт.) белых и желтых ручек. При этом белые составляют $0.25\cdot 12 = 3$ (шт.). Таким образом, желтых ручек будет $12 - 3 = 9$ (шт.).

Ответ: 5) 9.

5.

$$x(x-4) \le \frac{25}{x^2-4x} \Leftrightarrow (x^2-4x) - \frac{25}{x^2-4x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2-4x)^2-25}{x(x-4)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-4x-5)(x^2-4x+5)}{x(x-4)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-5)(x+1)}{x(x-4)} \le 0$$

Отсюда методом интервалов получаем: $x \in [-1;0) \cup (4;5]$.

Ответ: 4) $x \in [-1;0) \cup (4;5]$.

6. $4^{\frac{\log_3 100}{\log_3 10}} + 6^{\frac{\log_3 12}{\log_3 6}} = 4^{\log_{10}100} + 6^{\log_6 12} = 4^2 + 12 = 16 + 12 = 28$.

Ответ: 4)28.

7. Область допустимых значений неравенства определяется неравенством $x+1>0$. Так как на ОДЗ $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) = -\log_3(x+1)$ и $2\log_{\sqrt{3}}(x+1) = 4\log_3(x+1)$, то неравенство принимает вид

$$4\log_3(x+1) - \log_3(x+1) \ge 1$$

или

$$\log_3(x+1) \ge \frac{1}{3},$$

откуда, потенцируя, получаем: $x \in \left[\sqrt[3]{3}-1;+\infty\right)$.

Ответ: 1) $x \in \left[\sqrt[3]{3}-1;+\infty\right)$.

8.

Пусть первый рабочий выполняет работу за $x$ дней. Тогда второй – за $x-3$ дня. Согласно условию получаем уравнение $\frac{7}{x}+\frac{5.5}{x-3}=1$ (вся работа выполнена при условии, что первый рабочий отработал 7 дней, а второй – 5.5). Отсюда $2x^2-31x+42=0$ и $x=14$ (второй корень не подходит по величине).

Ответ: 3) 14.

9.

$$\sin 960°\cdot\cos 495°=\sin(900°+60°)\cdot\cos(450°+45°)=(-\sin 60°)\cdot(-\sin 45°)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Ответ: 2) $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

10. Если ребро куба равно $a$, то полная поверхность куба составит $S=6a^2$. Поэтому $6a^2=18$, откуда $a=\sqrt{3}$. Следовательно, диагональ куба будет равна $d=a\sqrt{3}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$.

Ответ: 4) 3.

11. Имеем:

$$2-3\sin 2x=3\sin x-4\cos x \Leftrightarrow 2-6\sin x\cos x-3\sin x+4\cos x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2+4\cos x)-(3\sin x+6\sin x\cos x)=0 \Leftrightarrow 2(1+2\cos x)-3\sin x(1+2\cos x)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1+2\cos x)(2-3\sin x)=0.$$

Таким образом, уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}2\cos x+1=0,\\ 3\sin x-2=0,\end{array}\right.$ каждое из уравнений которой на промежутке $\left[-\frac{\pi}{3};2\pi\right]$ имеет по два корня (при этом все корни различны). Поэтому всего корней будет четыре.

Ответ: 4) 4.

12. Стоимость заказа в первой фирме составит $2.5+0+50\cdot 0.11=8.0$ (руб.), во второй – $0+2.0+(50-10)\cdot 0.16=8.4$ (руб.), в третьей – $1.8+3.0+(50-15)\cdot 0.13=9.35$ (руб.). Таким образом, самый дешевый заказ будет у первого поставщика. Его стоимость – 8 руб.

Ответ: 5) 8.0.

13. Перепишем систему в виде (первое уравнение умножаем на $-1$, а во втором приводим левую часть к общему знаменателю) $\begin{cases}xy(y-x)=20,\\ \frac{y-x}{xy}=\frac{5}{4}.\end{cases}$ Теперь, вводя новые неизвестные по формулам $\begin{cases}a=y-x,\\ b=xy,\end{cases}$, получаем относительно них систему $\begin{cases}ab=20,\\ \frac{a}{b}=\frac{5}{4}.\end{cases}$ Отсюда, перемножая почленно уравнения, получим: $a^2=25$. Тогда $a=\pm 5$ и, значит, $b=\pm 4$. Таким образом, возвращаясь к исходным неизвестным, имеем два случая:

1) $\begin{cases}y-x=5,\\ xy=4.\end{cases}$

Выражая из первого уравнения $y$ $(y=x+5)$ и подставляя во второе, получаем:

$$x^2+5x-4=0,$$

откуда $x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{41}}{2}$. Следовательно, $y_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{41}}{2}$.

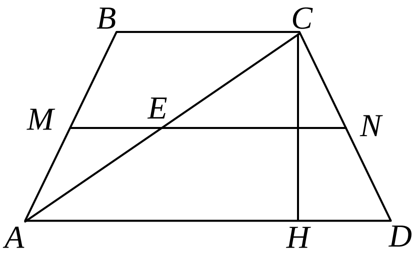
2) $\begin{cases} y-x=-5, \\ xy=-4. \end{cases}$

Действуя аналогично первому случаю, находим: $x_3=1,\ y_3=-4;\ x_4=4,\ y_4=-1$.

Таким образом, наибольшее значение $y$, удовлетворяющее системе, равно $\dfrac{5+\sqrt{41}}{2}$.

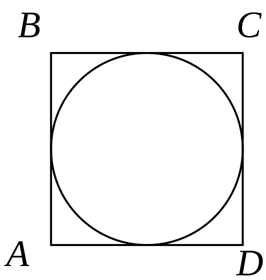
Ответ: 3) $\dfrac{5+\sqrt{41}}{2}$.

14. Пусть $ABCD$ – заданная равнобедренная трапеция, $MN$ – ее средняя линия. Тогда отрезки $ME$ и $EN$ будут средними линиями в треугольниках $ABC$ и $ACD$ соответственно, и так как $ME=2,\ EN=5$, то по свойству средней линии треугольника $BC=2ME=4$, $AD=2EN=10$. Опустив высоту $CH$, получаем (для равнобедренной трапеции проекция боковой стороны на большее основание равна полуразности оснований): $DH=\dfrac{AD-BC}{2}=\dfrac{10-4}{2}=3$. Тогда по теореме Пифагора из $\Delta CHD$ найдем: $CH=\sqrt{CD^2-DH^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$. Следовательно, $S_{ABCD}=\dfrac{AD+BC}{2}\cdot CH=7\cdot 4=28$.




Ответ: 4) 28.

15. Осевое сечение указанной в условии конструкции представляет собой окружность (осевое сечение шара), вписанную в прямоугольник. Следовательно, этот прямоугольник есть квадрат, сторона которого – диаметр основания конуса. Тогда радиус шара равен радиусу основания цилиндра. Поэтому




$$S_ш=4\pi R^2=4\pi\cdot 3^2=36\pi$$

Ответ: 4) 36π.

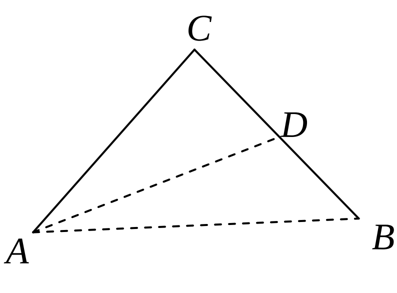
## Вариант 29

## Решения экзаменационных заданий

1. Пусть $n$ – задуманное число, тогда $(10n+7-n^2)\times 0.25 - n = 0$.

Ответ: 7.

2. Пусть скорость движения по дороге составляет $v\left(\dfrac{км}{ч}\right)$.




Тогда скорость движения «напрямик» будет $\dfrac{2}{3}v\left(\dfrac{км}{ч}\right)$. Пусть также для того чтобы добраться от $A$ до $C$, потребуется $t$ $(ч)$. Тогда: 1) для того, чтобы добраться от $C$ до $B$, потребуется $(5-t)\ (ч)$; 2) $AC = tv,\ CB = (5-t)v,\quad AB = 6.5\cdot\frac{2}{3}v = \frac{13}{3}v$. По теореме косинусов, примененной к треугольнику $ACB$, получаем:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC\cdot CB\cos\angle ACB$$

или (после подстановки полученных выше выражений и сокращения на $v^2$)

$$t^2 + (5-t)^2 + t(5-t) = \left(\frac{13}{3}\right)^2.$$

Отсюда

$$t_1 = \frac{8}{3},\ t_2 = \frac{7}{3}.$$

Для отбора нужного значения выразим по теореме косинусов $AD$ с учетом того, что $CD = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}(5-t)v$ и время на преодоление расстояния $AD$ составит больше, чем $5\cdot\frac{2}{3} = \frac{10}{3}\ (ч)$:

$$AD^2 = AC^2 + \frac{1}{4}CB^2 - AC\cdot CB\cos\angle ACB$$

или

$$t^2 + \frac{1}{4}(5-t)^2 + \frac{t(5-t)}{2} > \left(\frac{10}{3}\right)^2.$$

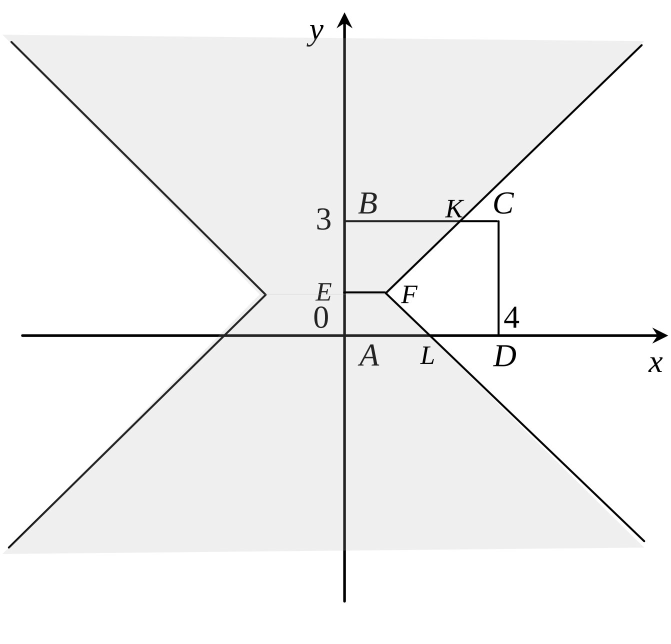
Последнему неравенству удовлетворяет значение $t = \frac{8}{3}\ (ч) = 2\,ч\ 40\,мин$.

Ответ: 2 ч 40 мин.

3. Раскрывая модули (метод подобластей), получаем: искомая область является объединением четырех подобластей, удовлетворяющих следующим четырем системам неравенств:

$$\begin{cases} y \le 1, \\ x \ge -1, \\ x+1-1+y \le 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} y \ge 1, \\ x \ge -1, \\ x+1+1-y \le 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \le 1, \\ x \le -1, \\ -x-1-1+y \le 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} y \ge 1, \\ x \le -1, \\ -x-1-1+y \le 2. \end{cases}$$

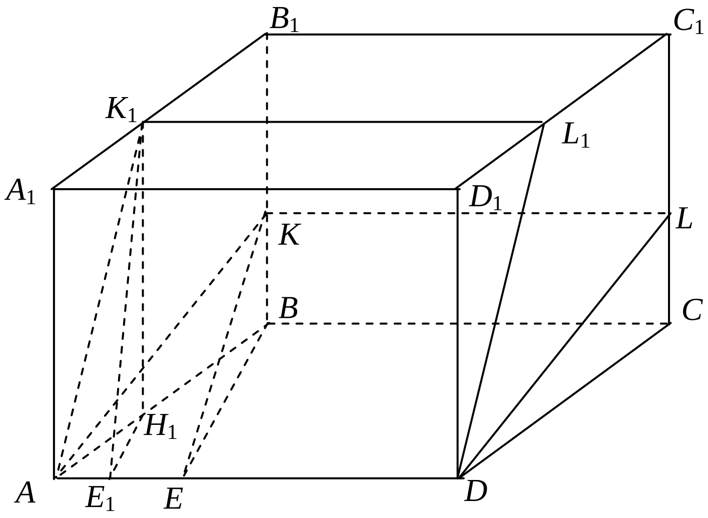



Область изображена на рисунке (темным фоном). При этом, как легко видеть, указанный в условии прямоугольник $ABCD$ в пересечении с данной областью образует фигуру, являющуюся объединением двух прямоугольных трапеций: $BEKF$ и $AEFL$, причем $AE = 1,\ BE = 2,\ EF = 1,\ AL = 2,\ BK = 3$ (сторона $FK$ лежит на прямой $y = x$, а сторона $FL$ – на прямой $y = -x + 2$). Поэтому требуемая площадь есть

$$S = S_{BEFK} + S_{AEFL} = \frac{EF + BK}{2} \cdot BE + \frac{EF + AL}{2} \cdot AE = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}.$$

Ответ: $\frac{11}{2}$.

4. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – заданная прямая призма: $ABCD$ – ромб, $AD = 2$, $\angle A = 30°$, $AA_1 = 1$. Пусть заданное сечение проходит через сторону $AD$ основания и пересекает противоположное боковое ребро, т.е. имеет вид $AKLD$. Поскольку призма прямая, то $KB \perp пл\, ABCD$ и, значит, опустив из точки $B$ перпендикуляр $BE$ на $AD$, по теореме о трех перпендикулярах получаем: $KE \perp AD$. Следовательно, $\angle KEB = 60°$ как линейный угол двугранного угла между плоскостью сечения и плоскостью основания. Тогда в прямоугольном треугольнике $ABE$ $BE = \frac{1}{2}AB = 1$ (как катет, лежащий против угла в $30°$) и из прямоугольного $\Delta KBE$ находим: $KB = BE \cdot \operatorname{tg} \angle KEB = 1 \cdot \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$. Таким образом, $KB > BB_1$, а это означает, что сечение не пересекает противоположного бокового ребра, т.е. имеет вид $AK_1L_1D$. Опуская перпендикуляр $K_1H_1$ на плоскость основания (при этом, так как призма прямая, $H_1 \in AB$) и проводя $H_1E_1 \perp AD$, по теореме о трех перпендикулярах получаем: $K_1E_1 \perp AD$, т.е., во-первых, $K_1E_1$ – высота параллелограмма $AK_1L_1D$, а во-вторых, $\angle K_1E_1H_1 = 60°$. Поэтому из прямоугольного треугольника $K_1H_1E_1$ находим: $K_1E_1 = \frac{K_1H_1}{\sin \angle K_1E_1H_1} = \frac{1}{\sin 60°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Таким образом, $S_{AK_1L_1D} = AD \cdot K_1E_1 = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$.




Ответ: $\frac{4}{\sqrt{3}}$.