Задания на Первый Минский городской открытый турнир юных математиков – 2014

(младшая группа, 5-7 классы)

Задача № 1. Деление плоскости

Назовем n несовпадающих прямых *прямыми общего положения*, если любые две из них пересекаются и через точку пересечения любых двух прямых не проходит третья (в одной точке не могут пересекаться три или более прямых).

1) На сколько частей делят плоскость 3 прямые общего положения?

2) На сколько частей могут делить плоскость 4 прямые (не обязательно общего положения? Попробуйте рассмотреть и классифицировать все случаи.

3) Найдите наименьшее и наибольшее число частей плоскости, на которые она делится 5 прямыми.

4) Найдите количество частей, на которые плоскость делится n прямыми общего положения.

5) Найдите (или оцените) количество частей, на которые плоскость делится n прямыми, среди которых а) ровно две параллельны; б) ровно три параллельны.

6) Предложите свои обобщения.

Задача № 2. Игры на школьной доске

1) Два мальчика играют в такую игру: по очереди ставят ненулевые цифры в клетки таблицы 1×6 (в каждую клетку ровно одну цифру). Первый старается сделать так, чтобы получившееся шестизначное число не делилось на 9, а второй – чтобы делилось. Кто из них выиграет при правильной игре? (Каждый старается выиграть.)

2) Ответьте на тот же вопрос, если число должно делиться на 11 (первый хочет, чтобы не делилось, а второй – чтобы делилось).

3) Кто выиграет в условиях пункта 1, если таблица: а) 1×7, б) 1×8, в) $1\times n$?

4) Исследуйте, для каких признаков делимости (на 2, на 3, на 4 и т.д.) есть выигрышная стратегия у первого игрока, а для каких – у второго.

5) Предложите свои обобщения и направления в решении данной задачи.

Задача № 3. Тетрис

1) Можно ли замостить доску 10×10 прямоугольниками 1×4?

2) На какие одинаковые части из четырех клеток 1×1 можно разрезать квадрат 10×10 (такие фигурки, известные вам из тетриса, называют тетрамино)?

3) Какое наибольшее количество полосок 1×5 можно вырезать из листа клетчатой бумаги размером 12×13? (Резать можно только по линиям клеток.)

4) Ответьте на тот же вопрос для полосок 1×6.

5) Исследуйте те же вопросы для разрезания листа бумаги других размеров.

6) Предложите свои обобщения и направления в решении данной задачи.

Задача № 4. Али-Баба и сокровища

Али-Баба пришел в пещеру, где есть золото, алмазы и сундук, в котором их можно унести. Полный сундук золота весит 200 кг, полный сундук алмазов — 40 кг, пустой сундук ничего не весит. Килограмм золота стоит на базаре 20 динаров, килограмм алмазов — 60 динаров. Али-Баба может поднять и унести не более 100 кг.

1) Какую наибольшую сумму денег он может получить за сокровища, которые он принесет из пещеры за один раз?

2) Предположим, что в пещере было темно и Али-Баба не видит, что он загружает в сундук. Поэтому он загружает сокровища в сундук либо пока он не наполнится до краев, либо пока его масса не станет равной 100 килограмм, Какую наименьшую сумму денег он может получить за сокровища, которые он принесет из пещеры за один раз?

3) Решите пункты 1 и 2 задачи, при условии, что сундук весит 20 кг.

4) В пещере есть платина, золото и серебро. Полный сундук серебра весит 150 кг, полный сундук золота – 100 кг, полный сундук платины – 60 кг, пустой сундук ничего не весит. Килограмм серебра стоит на базаре 30 динаров, килограмм золота – 50 динаров, килограмм платины – 70 динаров. Какую наибольшую сумму денег он может получить за сокровища, которые он принесет из пещеры за один раз, при условии, что должны быть все три металла (по целому числу килограмм)?

5) Предложите свои обобщения и направления в решении данной задачи.

Задача № 5. Т-преобразование

Имеется пара натуральных чисел (a, b). С нею разрешается делать такое преобразование: одно из чисел умножить на 2, а другое увеличить на 1. например, из пары (3,7) можно получить по своему желанию либо пару (6,8), либо пару (4,14).

1. Доказать, что из пары (1, 1) нельзя путем таких преобразований (назовем их Т-преобразованием) получить пару (2013, 2014).

2. Можно ли из пары (1, 1) получить путем Т-преобразований пару (2013, 3348)?

3. Опишите все пары 4-х значных чисел, которые можно получить из пары (1, 1).

4. Ответьте на вопросы пунктов 1-3 для пары (1, 2), для пары (1, 3), для пары (2,3).

5. Доказать, что любую начальную пару чисел путем таких преобразований можно перевести в пару одинаковых чисел.

6. Одно из чисел пары равно 1, а другого мы не знаем (но знаем верхнюю границу, например, что оно меньше 100). Можно ли придумать такую последовательность Т-преобразований, что на каком-то шаге числа в паре обязательно станут равными?

7. Пусть необходимо добиться, чтобы модуль разности двух чисел из пары был равен N. Начальное значение пары чисел – (1, 2). Для каких натуральных чисел N этого можно добиться с помощью Т-преобразований, а для каких нет?

Задача № 6. Дележ сыра

Две мыши — Саша и Серёжа — делят кусок сыра весом 1 кг. Сначала Сережа режет сыр на два куска, потом Саша — любой из кусков снова на два куска и так далее, пока не получится n кусков (вес каждого куска должен быть не менее 1 г). Затем Сережа берет себе один кусок, потом Саша — один из оставшихся кусков, потом снова Сережа и так, пока куски не закончатся.

Какое наибольшее количество сыра (в граммах) может себе гарантировать Сережа и как для этого он должен делить сыр?

1. Решить задачу, если $n = 3$.
2. Решить задачу, если $n = 4$.
3. Решить задачу, если $n \geq 5$.
4. Решите задачу, если первым кусок сыра берет Саша (начните с $n = 2$).
5. Предложите свои обобщения и направления исследования задачи.

Задача № 7. «Выходи из круга ты…» (*Задача Иосифа Флавия*)

1. Дети играют в такую игру. Они становятся в круг, считаются по номерам от 1 до 10. Затем начинают выбывать из игры через одного, считая от первого человека. Как узнать номер ребенка, который останется последним?

2. Тот же вопрос, если детей 11.

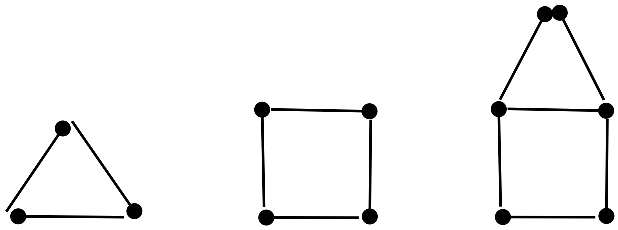
3.Что изменится в решении задачи, если выбывать будет каждый третий, считая с первого номера? Решите задачу, если детей: а) 10; б) 11.

4. Укажите зависимость номера оставшегося человека при произвольных n и m (n – количество человек в кругу, m – через столько человек начинают выбывать; попробуйте решить задачу хотя бы для некоторых значений n и m).

5. Предложите свои обобщения и направления исследования задачи.

Задача № 8. Фигуры из спичек

1. Из спичек сложены фигуры трех видов (треугольник, квадрат и домик):



а) Пусть спичек 36 и фигур 10. Найдите число фигур каждого вида.

б) Пусть спичек m и фигур 10. Определите, при каких значениях m можно ответить на вопрос пункта а).

в) Пусть спичек 36 и фигур n. Определите, при каких значениях n можно ответить на вопрос пункта а).

г) Пусть спичек m и фигур n. Определите, при каких значениях m и n можно ответить на вопрос пункта а).

2. Из m спичек сложено n фигур указанных выше видов. Известно, что имеются фигуры лишь двух видов. Определите, при каких значениях m и n можно найти число фигур каждого вида.

3. Из спичек можно складывать фигуры указанных выше трех видов. При этом обязательно надо использовать все спички. И два способа складывания считаются различными, если в них количество фигур хотя бы одного вида различное.

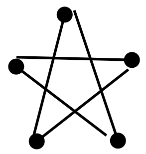
а) Пусть имеется 2014 спичек. Сколькими способами можно из них сложить 555 фигур?

б) Пусть имеется m спичек. Сколькими способами можно из них сложить 555 фигур?

в) Пусть имеется 2014 спичек. Сколькими способами можно из них сложить n фигур?

г) Пусть имеется m спичек. Сколькими способами можно из них сложить n фигур?

4. Добавьте к рассмотренным трем видам фигур четвертую (звездочку) и ответьте на вопросы пунктов 1–3.



5. Рассмотрите другие фигуры, предложите свои обобщения.

Задача № 9. «Пузатость» прямоугольников

Назовем «*пузатостью*» прямоугольника отношение длины меньшей стороны к длине большей стороны (например, пузатость квадрата равна 1).

1) Разрежем квадрат произвольным образом на четыре прямоугольника двумя перпендикулярными прямыми, параллельными его сторонам. Докажите, что сумма пузатостей четырех полученных прямоугольников не меньше единицы.
2) Аналогично первому пункту проведем m прямых, параллельных сторонам квадрата. На какое число прямоугольников они могут разрезать квадрат? Найдите максимально возможную суммарную пузатость всех полученных прямоугольников.
3) Вообще, для каких натуральных значений k, можно найти такое расположение m прямых, параллельных сторонам квадрата, чтобы они разрезали квадрат на прямоугольники, сумма пузатостей которых была бы равна k? Попробуйте обобщить эту задачу.
4) Попробуйте сформулировать аналогичные вопросы и ответить на них (с обоснованием) для разрезания прямоугольников с заданной пузатостью. Значение пузатости исходного прямоугольника (т.е. отношение длин его сторон) задайте сами. Например:

   4.1. Верно ли, что суммарная пузатость полученных при разрезании прямоугольников всегда больше пузатости исходного прямоугольника?

   4.2. Для каких натуральных значений k, вы сможете найти такое расположение m прямых, чтобы они разрезали прямоугольник на меньшие прямоугольники, сумма пузатостей которых была бы равна k?
5) Предложите свои вопросы для обобщения этой задачи и исследуйте их.