<u>Задания на Третий Минский городской открытый</u>
<u>турнир юных математиков – 2016</u>

(младшая лига, 5-7 классы)

10-12 марта 2016 года

- *Предварительные заявки с указанием учреждения образования, руководителя, его телефона и электронного адреса необходимо представить* ***до 15 февраля 2016 г.***
- *Официальные заявки и предварительные решения необходимо представить* ***до 23 февраля 2016 года***
- *В предварительных материалах должны быть представлены ваши исследования (решения)* ***не менее 6 заданий****.*

Обращаем ваше ***ВНИМАНИЕ*** на то, что предлагаемые задачи (задания!) носят исследовательский характер, поэтому наилучшие обобщения и полные решения неизвестны даже их авторам, поэтому:

- хотя мы и ждем максимальных ВАШИХ обобщений, но во многих задачах интерес представляют даже *отдельные частные случаи*;
- возможно (это допускается и даже приветствуется) ВЫ *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных непосредственно в формулировках задач;
- кроме рассмотрения исходной постановки *полезно исследовать свои направления*, причем совсем необязательно ваши обобщения должны совпадать с предложениями авторов задач;
- **КАЖДУЮ ЗАДАЧУ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО**: в распечатанном (шрифт –Times New Roman 15, интервал 1,5) виде; при этом оформление каждой задачи должно начинаться **С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором должны быть указаны номер задачи и ее название, название учреждения образования, город, автор(ы) исследования (решения); **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте краткое резюме вашего исследования** – какие пункты вы решили, какие сделали обобщения, четко сформулируйте ВАШИ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ (утверждения, примеры, гипотезы), с указанием страниц в работе, где они приведены и доказаны (обоснованы);

На последней странице приведите список литературы или Интернет-источников, которые Вы использовали при проведении исследования (***строго обязательно***!)

№1. «Кубы и числа»

1) Можно ли пронумеровать ребра куба числами от 1 до 12 (каждое ребро – своим числом) так, чтобы сумма чисел на любых трех ребрах, сходящихся в одной вершине, делилась на 3?

2) В каждой вершине куба записано натуральное число от 1 до 8 (каждое число ровно один раз). За один шаг разрешается к любым двум числам прибавить по единице. Всегда ли можно добиться, чтобы все числа в вершинах стали одинаковыми?

3) Исходное условие как в пункте 2), но за один шаг теперь разрешается прибавить по единице к любым двум числам, расположенным на одной грани. Можно ли добиться, чтобы все числа в вершинах стали одинаковыми?

3а) если – да, то приведите соответствующие примеры,

3б) если – нет, то приведите соответствующие примеры расположения чисел и докажите, что нельзя добиться требуемого, 3в) сможете ли вы указать условия, при которых можно добиться требуемого, и при которых – нельзя.

4) Исходное условие как в пункте 2), но теперь за один шаг разрешается прибавлять по единице к любым двум числам, расположенным на одном ребре. Можно ли добиться, чтобы все числа в вершинах стали одинаковыми?

Исследуйте пункты, аналогичные пунктам 3а), 3б), 3в) для этого случая.

5) Исследуйте вопросы пунктов 2) – 4) для других наборов чисел, расположенных в вершинах куба (опишите каких; интерес представляет как рассмотрение отдельных необычных наборов, так и какие-то общие случаи).

6) Предложите свои обобщения и направления исследования данной задачи и изучите их. Например, можно рассмотреть аналогичные задачи на различных пирамидах, октаэдре или других многогранниках. Другой вариант обобщения – в пунктах 2 – 4 прибавлять единицы не к двум вершинам, а к трем и т.п.

№ 2. «Пирожки»

1) Мама испекла пирожки — три с рисом, три с капустой и один с вишней — и выложила их по кругу в этом же порядке по ходу часовой стрелки. Потом поставила блюдо в микроволновку подогреть. На вид все пирожки одинаковые. Маша знает, как они лежали, но не знает, как повернулось блюдо. Она хочет съесть пирожок с вишней, а остальные считает невкусными. Как Маше наверняка добиться этого, надкусив как можно меньше невкусных пирожков?
2) Решите задачу, если мама испекла k пирожков с рисом, k пирожков с капустой и один с вишней.
3) Решите задачу, если мама испекла k пирожков с рисом, m пирожков с капустой и один с вишней.
4) Решите задачу, если мама испекла k пирожков с рисом, k пирожков с капустой, k с мясом и один с вишней.
5) Предложите свои обобщения и направления исследования данной задачи и изучите их.

№ 3. «Точки»

На плоскости отметили несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.
1) Сколько точек могли отметить, если известно, что любой треугольник с вершинами в отмеченных точках будет непременно равносторонним? Найдите все ответы и докажите, что других нет.
2) Тот же вопрос, если любой треугольник – прямоугольный.
3) Тот же вопрос, если любой треугольник – тупоугольный.
4) Тот же вопрос, если любой треугольник – равнобедренный.
5) Предложите свои обобщения и направления исследования данной задачи и изучите их.

№ 4. «Кубики»

1) К каждой грани кубика приклеили по такому же кубику. К каждой грани поверхности получившейся фигуры приклеили ещё раз по такому же кубику (при этом некоторые кубики закрыли две грани).

1а) Сколько граней у полученного тела?

1б) Из скольких кубиков состоит это тело?

2) Ответьте вопросы пунктов 1а) и 1б), если к каждой грани полученной фигуры кубики приклеили еще раз,

2а) и еще раз,

2б) и еще несколько раз (для определенности будем считать, что процедура приклеивания повторялась *n* раз, начиная с самой первой в пункте 1)).

3) Ответьте на те же вопросы из пунктов 1) - 2), если кубик можно приклеивать только в том случае, если он касается только одной грани тела, полученного на предыдущем шаге.

4) Рассмотрите иные ограничения на приклеивание кубиков.

5) Предложите свои обобщения и направления исследования данной задачи и изучите их.

№ 5. «Разрезания фигур»

1) Возможно ли разрезать на равнобедренные треугольники: а) квадрат; б) прямоугольник? Если – да, то покажите как, если нет, то докажите.

2) Тот же вопрос, если нужно разрезать а) параллелограмм; б) равнобокую трапецию? Если – да, то покажите как, если нет, то докажите, почему нельзя.

3) Дополнительно, если нет, то дайте по возможности более общие условия, при которых фигуру можно разрезать на равнобедренные треугольники.

4) Дополнительно, если да, то, на какое число равнобедренных треугольников можно разрезать соответствующую фигуру, а на какое – нельзя? Попробуйте найти как можно больше таких значений или описать соответствующие множества значений.

5) Дополнительно, если да, то, на какое наименьшее число равнобедренных треугольников можно разрезать соответствующую фигуру.

6) Предложите свои обобщения и направления исследования данной задачи и изучите их. Например, рассмотрите аналогичные задачи для разрезания различных фигур (прямоугольного или произвольного треугольника, квадрата, прямоугольника, трапеции, произвольного многоугольника) на равнобокие трапеции, на произвольные трапеции (например, интересно, можно ли разрезать правильный пятиугольник на трапеции?!).

№ 6. Игры на калькуляторах

Катя и Миша имеют по калькулятору. Катин калькулятор может либо увеличить число на 1, либо умножить число на 2. Мишин калькулятор может увеличить число на 1 или умножить на 3. Никакие другие операции калькуляторы не исполняют. В начальный момент на обоих калькуляторах нули.

1. Катя и Миша хотят получить на своих калькуляторах число 2016, начиная с нуля. Какое наименьшее количество операций понадобится для этого а) Кате, б) Мише?

2. Приведите пример чисел, для получения которых Катя может выполнить меньше операций на своем калькуляторе, чем Миша.

3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, для получения которых Миша может использовать на своем калькуляторе меньше операций, чем Катя.

4. Конечно или бесконечно множество всех натуральных чисел, для получения которых Катя может использовать на своем калькуляторе меньше операций чем Миша?

5. Предложите свои обобщения и направления исследования данной задачи и изучите их.

№ 7. Игра в необычные крестики-нолики.

0) *Исходная задача*. Игра в необычные крестики-нолики 3×3: правила остаются прежними, с той лишь разницей, что каждый игрок на своем ходу может поставить либо крестик, либо нолик по своему выбору. Побеждает тот, кто первый поставит ряд из трех одинаковых фигур. Кто выиграет при правильной игре, и как ему надо играть?

1) Рассмотрите игру в необычные крестики-нолики на произвольных досках $m \times n$, хотя бы для некоторых значений параметров m и n. По-прежнему, побеждает тот, кто первый поставит ряд из трех одинаковых фигур. Кто выиграет при правильной игре, и как ему надо играть?

2) Рассмотрите игру в необычные крестики-нолики на необычных досках (на цилиндре, или на доске состоящей из правильных треугольников и т.п.).

3) Предложите свои обобщения и направления исследования в этой задаче и изучите их.

№ 8. Разбиения

Представление натурального числа в виде суммы натуральных слагаемых назовем разбиением этого числа (например, 15=7+3+3+2). Порядок слагаемых не учитывается, поэтому 3=2+1 и 3=1+2 это одно и тоже разбиение.

Через $P(N)$ обозначим число всех разбиений числа N, через $P_k(N)$ — число всех тех разбиений числа N, которые удовлетворяют дополнительному условию: любые два слагаемых различаются не более чем на k. Через $Q_k(N)$ обозначим число всех разбиений, для которых любые два слагаемые отличаются не более чем на k и все слагаемые нечетны.

а) Найдите $P(2016)$ и $P_1(2016)$.

б) Найдите $P(N)$ и $P_1(N)$ для произвольного N.

в) Найдите $Q_1(2016)$ и $Q_2(2016)$.

г) Найдите $P_2(N)$ и $P_3(N)$ для произвольного N.

д) Найдите $P_k(N)$ и $Q_k(N)$ хотя бы для некоторых k и N.

№ 9. Количества

I. 1) Сколько отрезков различных по длине можно расположить на отрезке $[0, n]$ числовой прямой так, чтобы концы всех отрезков были различными целыми точками прямой?

I. 2) Сколько отрезков различных по длине можно расположить на отрезке $[0, n]$ числовой прямой так, чтобы концы всех отрезков были целыми точками прямой и при этом каждая целочисленная точка могла быть концом не боле двух из этих отрезков?

II. 1) На координатной плоскости дан квадрат $n \times n$ с вершинами в целочисленных точках, стороны которого параллельны осям координат. Сколько можно указать различных прямоугольников, стороны которых параллельны осям, а все вершины — целочисленные точки, принадлежащие данному квадрату, таким образом, чтобы каждая точка является вершиной не более чем одного прямоугольника? (Примечание. В этом пункте под понятием различные имеются в виду «неравные», т.е. не совмещаемые друг с другом при движениях и симметриях.)

II. 2) Тот же вопрос, что и в пункте II. 1), но надо найти не количество прямоугольников, а количество неравных квадратов.

III. Сколько можно указать различных отрезков, концы которых расположены в целых точках числовой прямой, принадлежащих отрезку $[0, n]$, где n — натуральное число?

IV. 1) На координатной плоскости дан квадрат $n \times n$ с вершинами в целочисленных точках, стороны которого параллельны осям координат. Сколько можно указать различных прямоугольников, стороны которых параллельны осям, а все вершины — целочисленные точки, принадлежащие данному квадрату? (Примечание. В этом пункте под понятием различные имеются в виду различные по расположению на плоскости, но среди них могут быть равные.)

IV. 2) Тот же вопрос, но надо найти не количество прямоугольников, а количество различных квадратов.

IV. 3) Тот же вопрос, но надо найти количество различных прямоугольных треугольников.

Решите аналогичные задачи в трехмерном пространстве.

№ 10. Задача о дружбах, рукопожатиях и улыбках.

1) *Исходная задача*. В седьмом классе некоторой школы каждый мальчик дружит с 5-ю девочками и 6-ю мальчиками, а каждая девочка дружит с 6-ю мальчиками и 5-ю девочками. А) Сколько школьников учится в этом классе, если известно, что их не более тридцати? Б) А если их не более 35?

2) Перед началом уроков классный руководитель заметил, что каждый учащийся его класса поздоровался за руку с шестью девочками и восемью мальчиками.

При этом количество рукопожатий между мальчиками и девочками было на пять меньше числа остальных рукопожатий. Сколько учеников в классе?

3) На олимпиаду по математике прибыло несколько учащихся 8 класса. Некоторые из них оказались уже знакомыми. При встрече Маша улыбнулась своему знакомому Саше, а Коля улыбнулся незнакомой ему девочке Оле. И вообще, каждая восьмиклассница улыбнулась каждому знакомому ей восьмикласснику, а каждый восьмиклассник улыбнулся незнакомой ему восьмикласснице. В результате было зафиксировано 155 улыбок. Сколько всего учащихся 8 класса участвовало в олимпиаде?

4) *Общая постановка*. Исследуйте задачи 1) – 3) при различных значениях параметров (числа дружб, рукопожатий, улыбок и проч.), или более подробно:

А) пусть в первом пункте каждый учащийся дружит с M мальчиками и N девочками, изучите возможные количества детей в классе (школе и т.п.), а также когда подобные ситуации невозможны;

Б) в пункте 2) помимо условий, указанных в обобщении А, рассмотрите различные значения разностей между рукопожатиями различных групп детей,

В) во всех пунктах и условиях предложите свои значения параметров (или задайте другие – свои параметры) и изучите разрешимость задач в этих случаях.

5) Предложите свои обобщения и направления исследования в этой задаче и изучите их.

№ 11. Неконфликтная автостоянка

Автомобильная стоянка представляет собой ряд из n мест, занумерованных слева направо числами от 1 до n, а въезд на стоянку находится справа. У въезда скопились n машин, и теперь они по очереди заезжают на стоянку. Каждый водитель сначала подъезжает к своему любимому месту. Если оно свободно, ставит туда машину, а если занято, то едет вперёд до ближайшего свободного места (назад поворачивать нельзя). Обозначим a_k, где $k \le n$, номер любимого места водителя k-й в очереди машины. Будем говорить, что последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ бесконфликтна, если удаётся поставить машины на стоянку, соблюдая указанные выше правила.

0. Для $n = 2$ проверьте, какие из последовательностей (1, 1), (1, 2), (2, 1) и (2, 2) бесконфликтны, а какие – конфликтны.

1. Найдите все бесконфликтные последовательности при: а) $n = 3$; б) $n = 4$.

2. Докажите, что последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ бесконфликтна тогда и только тогда, когда для любого натурального k, где $k < n$, количество членов последовательности, не превосходящих k, не превосходит k.

3. Найдите количество

а) бесконфликтных последовательностей длины n;

б) бесконфликтных неубывающих последовательностей длины n.