ТРИДЦАТЬ ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 18 марта 2012 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

баллы	задачи
4	1. В ряд лежит четное число груш. Массы любых двух соседних груш отличаются не более, чем на 1 г. Докажите, что можно все груши разложить по две в одинаковые пакеты и выложить пакеты в ряд так, чтобы массы любых двух соседних пакетов тоже отличались не более, чем на 1 г.
4	2. На плоскости отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Саша разбивает точки на пары и соединяет точки в каждой паре отрезком. Всегда ли он может сделать это так, чтобы каждые два отрезка пересекались?
6	3. В бригаде сторожей у каждого есть разряд (натуральное число). Сторож N-го разряда N суток дежурит, потом N суток спит, снова N суток дежурит, N — спит, и так далее. Известно, что разряды любых двух сторожей различаются хотя бы в три раза. Может ли такая бригада осуществлять ежедневное дежурство? (Приступить к дежурству сторожа могут не обязательно одновременно, в один день могут дежурить несколько сторожей.)
6	4. В клетках таблицы $n \times n$ стоят знаки «+» и «−». За ход разрешается в любой строке или в любом столбце изменить все знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно за сколько-то ходов сделать все знаки в таблице плюсами. Докажите, что этого можно добиться, сделав не более n ходов.
8	5. Пусть p — простое число. Набор из $p+2$ натуральных чисел (не обязательно различных) назовем «интересным», если сумма любых p из них делится на каждое из двух оставшихся чисел. Найдите все «интересные» наборы.
8	6. Банк обслуживает миллион клиентов, список которых известен Остапу Бендеру. У каждого клиента есть свой PIN-код из шести цифр, у разных клиентов коды разные. Остап Бендер за один ход может выбрать любого клиента, которого он еще не выбирал, и подсмотреть у него цифры кода на любых N позициях (у разных клиентов он может выбирать разные позиции). Остап хочет узнать код миллионера Корейко. При каком наименьшем N он гарантированно сможет это сделать?
8	7. В равностороннем треугольнике ABC провели высоту AH. В треугольнике ABH отметили точку пересечения биссектрис I. В каждом из треугольников ABI, BCI и CAI отметили по точке пересечения биссектрис — L, K и J соответственно. Найдите величину угла KJL.

ТРИДЦАТЬ ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 18 марта 2012 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
4	1. В бригаде сторожей у каждого есть разряд (натуральное число). Сторож N-го разряда N суток дежурит, потом N суток спит, снова N суток дежурит, N — спит, и так далее. Известно, что разряды любых двух сторожей различаются хотя бы в три раза. Может ли такая бригада осуществлять ежедневное дежурство? (Приступить к дежурству сторожа могут не обязательно одновременно, в один день могут дежурить несколько сторожей.)
5	2. Внутри круга отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что их можно разбить на пары и провести прямую через каждую пару так, чтобы все точки пересечения прямых лежали в круге.
6	3. Докажите, что для любого натурального n существуют такие целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что при всех целых x число $(\ldots((x^2+a_1)^2+a_2)^2+\ldots+a_{n-1})^2+a_n$ делится на $2n-1$.
6	4. Внутри каждой грани единичного куба выбрали по точке. Затем каждые две выбранные точки, лежащие на соседних гранях, соединили отрезком. Докажите, что сумма длин этих отрезков не меньше, чем $6\sqrt{2}$.
8	5. Дан треугольник ABC и прямая l, касающаяся вписанной в него окружности. Обозначим через l_a, l_b, l_c прямые, симметричные l относительно биссектрис внешних углов треугольника. Докажите, что треугольник, образованный этими прямыми, равен треугольнику ABC.
	6.
3	а) В бесконечной последовательности бумажных прямоугольников площадь n-го прямоугольника равна n^2 (для $n = 1, 2, 3, \ldots$). Обязательно ли можно покрыть ими плоскость? Наложения допускаются.
6	б) Дана бесконечная последовательность бумажных квадратов. Обязательно ли можно покрыть ими плоскость (наложения допускаются), если известно, что для любого числа N найдутся квадраты суммарной площади больше N?
	7. У Кости была кучка из 100 камешков. Каждым ходом он делил какую-то из кучек на две меньших, пока у него в итоге не оказалось 100 кучек по одному камешку. Докажите, что
6	а) в какой-то момент в каких-то 30 кучках было в сумме ровно 60 камешков;
3	б) в какой-то момент в каких-то 20 кучках было в сумме ровно 60 камешков;
3	в) Костя мог действовать так, чтобы ни в какой момент не нашлось 19 кучек, в которых в сумме ровно 60 камешков.