34 Турнир городов. Осенний тур.

Базовый вариант, самые младшие классы

6-7 класс

1. *На концах диаметра окружности стоят единицы. Каждая из получившихся полуокружностей делится пополам, и в середине каждой из них тоже пишется единица (первый шаг). Затем каждая из четырех получившихся дуг делится пополам, и в середине каждой из них снова пишется единица (второй шаг). Такая операция проделывается 2012 раз. Найдите сумму всех записанных чисел.*

Ответ: 2^{2013}.

Решение. Заметим, что на каждом шагу сумма чисел (единиц) удваивается (добавляется столько, сколько было перед этим). В начале сумма чисел равна 2. Значит, после 2012 операций итоговая сумма чисел будет равна 2^{2013}.

2. *В теннисной секции тренируются девять юных спортсменов разной силы. Тренер решил провести тренировочные командные соревнования. В каждую команду включается по три спортсмена, во встрече между двумя командами каждый игрок любой команды играет ровно одну игру с одним из игроков другой команды. Предположим, что более сильный спортсмен всегда побеждает более слабого. Сможет ли тренер так распределить теннисистов по командам, что первая команда по числу побед одержала верх над второй, вторая - над третьей, третья - над первой?*

Ответ: сможет.

Решение. Обозначим игроков цифрами от 1 до 9 по мере возрастания их сил. Выигрыш (проигрыш) одного из игроков другому будем обозначать знаками больше (меньше). В частности всегда: 1<2<3<4<5<6<7<8<9. Распределим игроков по командам так: А : 1, 4 и 8; Б : 2, 5 и 7; В : 3, 6 и 9. Тогда матчи между командами организуем так:

$$\left.\begin{matrix} \textit{А и Б} \\ 1<2 \\ 4<5 \\ 8>7 \end{matrix}\right\} \text{команда Б выигрывает у А.}$$

$$\left.\begin{matrix} \textit{Б и В} \\ 2<3 \\ 5<9 \\ 7>6 \end{matrix}\right\} \text{команда В выигрывает у Б.}$$

$$\left.\begin{matrix} \textit{А и В} \\ 1<9 \\ 4>3 \\ 8>6 \end{matrix}\right\} \text{команда А выигрывает у В.}$$

3. *а) На столе стоят 8 перевернутых стаканов. Разрешается одновременно переворачивать любые 7 стаканов. Можно ли добиться, чтобы все стаканы стояли правильно?*

б) Та же задача, но всего стаканов 2012, а переворачивать разрешается 2011?

в) Та же задача, но всего стаканов 2013, а переворачивать разрешается 2012?

Ответ: а) Да; б) Да; в) Нет.

Решение. а) Итак на столе стоят вверх дном 8 стаканов (неправильно). Будем переворачивать стаканы следующим образом: на первом шагу перевернем все стаканы, кроме первого; на втором шагу − все стаканы, кроме второго; на третьем шагу − все стаканы, кроме третьего; и т.д.; на восьмом шагу − все стаканы, кроме восьмого. Заметим, что шагов (переворачиваний) − 8, но каждый стакан переворачивался ровно 7 раз, т.е. в конце все стаканы станут правильно.

б) Аналогично решению пункта а), только теперь понадобится 2012 переворачиваний.

в) Срабатывает идея четности, всегда переворачивается четное число стаканов (а именно 2012) следует заметить, что неправильно стоящих стаканов (т.е. вверх дном) всегда будет нечетное число.

4. *Про группу из пяти человек известно, что Алеша на 1 год старше Алексеева, Боря на 2 года старше Борисова, Вася на 3 года старше Васильева, Гриша на 4 года старше Григорьева, а еще в этой группе есть Дима и Дмитриев. Кто старше и на сколько: Дима или Дмитриев?*

Ответ: Дмитриев старше Димы на 10 лет.

Решение. Обозначим возраст Алеши буквой а, Бори − б, Васи − в, Гриши − г, Димы − д. Обозначим возраст Алексеева через А, Борисова − через Б, Васильева − через В, Григорьева − через Г, Дмитриева − через Д. Заметим, что а,б,в,г,д и А,Б,В,Г,Д − это одни и те же наборы чисел, но в разном порядке. Поэтому: а+б+в+г+д=А+Б+В+Г+Д отсюда следует (а−А)+(б−Б)+(в−В)+(г−Г)=Д−д. Согласно условию разности в левой части равенства равны 1,2,3,4. То тогда Д−д=10, отсюда и следует ответ.

5. *Пусть* $C(n)$ *−* *количество различных простых делителей числа* n. *(Например,* $C(10)=2, C(11)=1, C(12)=2$, *C(10)=2).*

а) Найдите десять таких пар натуральных чисел (a,b)*, что* $a \neq b$ *и* $C(a+b)=C(a)+C(b)$*?*

б) Для некоторого целого числа p *выполняется* $C(2012n)=C(n)+p$. *Какие значения может принимать* p *? (Укажите все возможности).*

в) Конечно или бесконечно число пар натуральных чисел (a,b)*, удовлетворяющих пункту а)?*

Ответ: а) см. ответ в пункте в);

б) p может принимать значения 0,1 или 2 (условия см. в решении).

в) бесконечно, например, все пары вида $(2^m;2^{m+1})$, $m \in N$.

Решение. а) и в). Легко видеть, что $C(2^m)=1$ и $C(2^{m+1})=1$, по $C(2^m+2^{m+1})=C(2^m\cdot 3)=2$, т.е. $2^m \neq 2^{m+1}$, но $C(2^m)+C(2^{m+1})=C(2^m+2^{m+1})$, здесь везде m − произвольное натуральное число.

б) Заметим, что $2012=2^2\cdot 503$, (2 и 503 − простые числа). Пусть n содержит m простых делителей, не равных 2 и 503. Поэтому $C(2012\cdot n)=C(2^2\cdot 503\cdot n)=2+m$.

Но тогда возможны следующие случаи:

1) n не кратно ни 2, ни 503. Поэтому $C(n)=m$ и равенство $C(2012n)=C(n)+p$ превращается в такое равенство $2+m=m+p \Rightarrow p=2$.

2) n кратно либо 2, либо 503, но не обоим этим числам. Тогда $C(n)=m+1$ и поэтому из условия получаем: $m+1=m+p \Rightarrow p=1$.

3) n кратно и 2 , и 503 (одновременно). Тогда $C(n)=2+m$ и получаем равенство: $2+m=2+m+p \Rightarrow p=0$.

Сложный вариант, самые младшие классы

6-7 класс

1. *Петя и Вася играют в игру, правила которой таковы. Петя загадывает целое число* x *с суммой цифр 2012. За один ход Вася выбирает любое натуральное число* a *и узнает у Пети число, равное* $|x-a|$. *Какое наименьшее число ходов необходимо сделать Васе, чтобы гарантированно определить* x *?*

Ответ: 2 хода .

Решение. За один ход Вася может узнать задуманное число только в том случае, если случайно сразу назовет число a равное x, тогда $|x-a|=0$. Иначе $|x-a|\neq 0$ и x может принять одно из двух значений: $x=a+|x-a|$ или $x=a-|x-a|$.

Два хода достаточно. На первом ходу Васе лучше всего назвать число 0, тогда он сразу знает $|x|$, т.е. ему осталось выбрать (узнать) какое число x или $-x$ задумал Петя.

На втором ходу Вася может назвать число $a=|x|$, и тогда, если $x>0$, то $|x-a|=|x-x|=0$, если же $x<0$, то $|x-a|=|x-|x||=2|x|\neq 0$

Замечание: Если Петя задумал число $x=0$, то Вася в этом случае узнает это число на первом ходу.

2. *Четыре мальчика поделили между собой 111 орехов. После дележа каждый мальчик обнаружил, что у кого-то из остальных есть либо столько же орехов, сколько у него, либо ровно в два раза больше. Могло ли так быть?*

Ответ: нет

Решение. Выберем мальчика с наименьшим числом орехов; пусть у него a орехов. Легко видеть их возможные лишь следующие четыре варианта количеств орехов у мальчиков:

	1-й мальчик	2й мальчик	3й мальчик	4-й мальчик	сумма
I вариант	*a*	*a*	*a*	*a*	*4a*
II вариант	*a*	*a*	*2a*	*2a*	*6a*
III вариант	*a*	*2a*	*2a*	*2a*	*7a*
IVвариант	*a*	*2a*	*4a*	*4a*	*11a*

Для выполнения хотя бы одного из вариантов общее число 111 орехов должно делиться хотя бы на одно из чисел 4,6,7 или 11, что очевидно неверно.

3. *В некоторых клетках таблицы* 3×3 *стоят плюсы, причем всего плюсов четное количество. В каждом квадратике* 2×2 *этой таблицы тоже четное число плюсов. Докажите, что четно и число плюсов в трех клетках главной диагонали таблицы.*

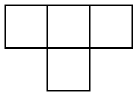
Решение. См. решение задачи № 3 для 8-9 классов.

4. *Буратино посадил на Поле Чудес золотую, серебряную и медную монеты. Из каждой монеты вырастает дерево, которое дает только один урожай. На «золотом» дереве созревают ровно 2 золотые монеты, на «серебряном» - ровно 3 серебряные, а на «медном» - ровно 4 медные. Буратино решил, что каждый день он будет собирать все монеты одного вида (или все золотые, или все серебряные, или все медные) и сажать заново. Может ли так получиться, что в какой-нибудь день количество золотых и серебряных монет вместе будет равно количеству медных?*

Ответ: нет.

Решение. Срабатывает идея четности. Собрав первый «урожай» (что определено условием) Буратино будет иметь 2 золотые, 3 серебряные и 4 медные монеты. После этого, как бы он не чередовал посадку монет золотых и медных всегда будет четное число, а серебряных − нечетное.

5. *В клетках таблицы* 12×16 *клеток расставили натуральные числа так, что сумма чисел внутри фигурки, изображенной на рисунке равна 44 при любом расположении этой фигурки (фигурку можно поворачивать). Может ли сумма всех чисел в таблице равняться 2012?*



Ответ: б) нет.

Решение. Таблицу 12×16 легко разбить на 12 квадратов 4×4, а каждый квадрат 4×4 разбить на 4 фигурки указанного вида (см. рис.1) поэтому сумма всех чисел в любом квадрате 4×4 равна $44\cdot4=176$. Но 2012 не делится на 176.

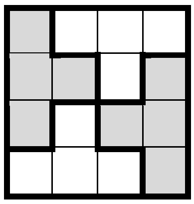


Рис. 1

6. а) В записи четырехзначного числа используются только две разные цифры, причем одинаковые цифры не стоят рядом. На какую наибольшую степень двойки может делиться такое число?

б) Решите такую же задачу для трехзначного числа.

Ответ: а) на $2^6=64$; б) $2^4=16$,

Решение. а) Искомое число можно записать в виде $\overline{abab}=\overline{ab}\cdot101$, а так как. 101 – нечетное число, то осталось заметить, что максимальную степень двойки дает $\overline{ab}=64=2^6$, т.е. $\overline{abab}=6464$.

б) Легко подобрать число 464, которое делится на $16=2^4$. В то же время недлинным перебором легко увидеть, что ни одно число вида $\overline{aba}$ не представимо в виде произведения $m\cdot32$

7. *Детский стол для игры в бильярд имеет форму правильного восьмиугольника с лузами в вершинах. Расположите на этом столе как можно меньше шаров так, чтобы каждая луза находилась на одной прямой с какими-то двумя шарами. (Лузы и шары считать точками.)*

Если Вы считаете, что меньшим количеством шаров обойтись нельзя, то постарайтесь это обосновать.

Примечание: Правильный восьмиугольник – это такой восьмиугольник, все стороны которого равны между собой и все углы равны между собой (и равны по 135°).

Ответ: Четыре шара.

Решение. Некоторые ребята предложили вариант с пятью шарами. Но можно обойтись и четырьмя (см. рисунок 2). Предположим, что нам удалось обойтись меньшим количеством шаров, например, тремя. Тогда три точки, изображающие эти шары, можно соединить попарно не более, чем тремя прямыми. На каждой такой прямой может лежать не более двух луз, поэтому стол должен будет иметь форму шестиугольника, что противоречит условию.

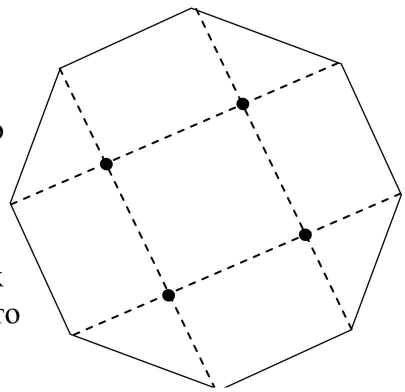


Рис. 2