

# ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур, 8-9 классы, базовый вариант, 7 октября 2012 г.

Решения писали Л.Медников и А.Шаповалов

1.1. [3] Про группу из пяти человек известно, что  
Алеша на 1 год старше Алексеева,  
Боря на 2 года старше Борисова,  
Вася на 3 года старше Васильева,  
Гриша на 4 года старше Григорьева,  
а еще в этой группе есть Дима и Дмитриев.

Кто старше и на сколько: Дима или Дмитриев?

**Решение.** Сумма возрастов Алеши, Бори, Васи, Гриши и Димы равна сумме возрастов Алексеева, Борисова, Васильева, Григорьева и Дмитриева. Значит, Дмитриев старше Димы на  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$  лет.

1.2. [4] Пусть  $C(n)$  – количество различных простых делителей числа  $n$ . (Например,  $C(10) = 2$ ,  $C(11) = 1$ ,  $C(12) = 2$ .) Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел  $(a, b)$ , что  $a \neq b$  и  $C(a + b) = C(a) + C(b)$ ?

**Ответ.** Бесконечно. Например, подходят все пары вида  $(2^n, 2^{n+1})$ . Здесь  $C(a) = 1$ ,  $C(b) = 1$ ,  $C(a + b) = C(3 \cdot 2^n) = 2$ .

1.3. [5] Таблица  $10 \times 10$  заполняется по правилам игры «Сапёр»: в некоторые клетки ставят по mine, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (по стороне или вершине). Может ли увеличиться сумма всех чисел в таблице, если все «старые» мины убрать, во все ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам?

**Решение.** Сумма всех чисел таблицы равно числу пар, состоящих из соседних заминированной и незаминированной клеток. При указанной операции эти пары сохраняются, поэтому сумма *не меняется*.

1.4. [5] Окружность касается сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  параллелограмма  $ABCD$  в точках  $K$ ,  $L$ ,  $M$  соответственно. Докажите, что прямая  $KL$  делит пополам высоту параллелограмма, опущенную из вершины  $C$  на  $AB$ .

**Решение 1.** Пусть  $CH$  – указанная высота,  $N$  – её точка пересечения с прямой  $KL$ . Ясно, что  $KM$  – диаметр окружности, а  $CHKM$  – прямоугольник. Пусть  $O$  – центр окружности,  $r$  – её радиус, тогда  $KM = CH = 2r$ . Достаточно доказать, что  $HN = r$ . Пусть  $\angle C = 2\alpha$ . Поскольку  $CO$  – биссектриса угла  $C$ , то  $\angle MCO = \alpha$ . В равнобедренном треугольнике  $BLK$   $\angle B = 180^\circ - 2\alpha$ , поэтому  $\angle BLK = \alpha$ . Прямоугольные треугольники  $KNH$  и  $COM$  равны по катету и острому углу. Но тогда  $HN = MO = r$ .

**Решение 1а.** Пусть  $CH$  – указанная высота,  $N$  – её точка пересечения с прямой  $KL$ . Ясно, что  $KM$  – диаметр окружности, а  $CHKM$  – прямоугольник. Пусть  $O$  – центр окружности. Высота  $CH$  равна диаметру, поэтому достаточно доказать, что  $CN = OK$ . Поскольку  $CO$  – биссектриса угла  $C$  равнобедренного треугольника  $LCM$ , то  $CO \perp LM$ . Но и прямая  $LK$  перпендикулярна  $LM$ , следовательно,  $CNKO$  – параллелограмм.

**Решение 2.** Пусть  $CH$  – указанная высота. Отложим на луче  $LB$  отрезок  $LN = LC$ . Ясно, что  $CHKM$  – прямоугольник. Поскольку  $BK = BL$  и  $NK = CM = CL = NL$ , то и  $BH = BN$ . В равнобедренных треугольниках  $BLK$  и  $BNH$  углы равны, поэтому прямая  $HN$  параллельна  $KL$ . Следовательно, прямая  $KL$  содержит среднюю линию треугольника  $HCN$  и делит сторону  $CH$  пополам.

1.5. [5] В классе 20 школьников. Было устроено несколько экскурсий, в каждой из которых участвовал хотя бы один школьник этого класса. Докажите, что найдётся такая экскурсия, что каждый из участвовавших в ней школьников принял участие по меньшей мере в  $\frac{1}{20}$  всех экскурсий.

**Решение.** Пусть число экскурсий равно  $n$ . Если *бедный* школьник побывал меньше чем на  $\frac{n}{20}$  экскурсиях, отметим эти экскурсии. Всего отмечено меньше  $20 \cdot \frac{n}{20} = n$  экскурсий, поэтому есть не отмеченная экскурсия. В ней бедные школьники не участвовали, что и требовалось доказать.

## Базовый вариант, 10-11 классы

2.1. [4] Таблица  $10 \times 10$  заполняется по правилам игры «Сапёр»: в некоторые клетки ставят по mine, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (по стороне или вершине). Может ли увеличиться сумма всех чисел в таблице, если все «старые» мины убрать, во все ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам?

**Решение.** Сумма всех чисел таблицы равно числу пар, состоящих из соседних заминированной и незаминированной клеток. При указанной операции эти пары сохраняются, поэтому сумма *не меняется*.

2.2. [4] Даны выпуклый многогранник и сфера, которая пересекает каждое ребро многогранника в двух точках. Точки пересечения со сферой делят каждое ребро на три равных отрезка. Обязательно ли тогда все грани многогранника:

а) [2] равные многоугольники;

б) [3] правильные многоугольники?

а) **Ответ.** Не обязательно. **Решение.** Рассмотрим правильную треугольную призму с квадратными боковыми гранями. Отметим на каждом ребре точки, делящие его на три равные части. Очевидно, эти точки равноудалены от центра призмы, то есть лежат на сфере соответствующего радиуса.

б) **Ответ.** Обязательно. **Решение.** Пусть  $A_1 \dots A_n$  – одна из граней многогранника. Все точки  $B_i, C_i$ , делящие его стороны  $A_{i-1}A_i$  на три равные части, лежат на одной окружности (пересечении сферы с плоскостью грани) с центром  $O$ . Пусть  $A_{i-1}A_i = 3a$ ,  $A_iA_{i+1} = 3b$ . По теореме о секущей  $A_iB_i \cdot A_iC_i = A_iB_{i+1} \cdot A_iC_{i+1} \Leftrightarrow 2a^2 = 2b^2 \Leftrightarrow a = b$ . Значит, все стороны грани равны. Поэтому равны и все отрезки  $B_iC_i$  и равнобедренные треугольники  $B_iOC_i$ . Следовательно, равны все треугольники вида  $B_iOA_i$ , углы  $B_iA_iO$  и углы  $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1} = 2\angle B_iA_iO$ .

2.3. [5] В классе 20 школьников. Было устроено несколько экскурсий, в каждой из которых участвовало хотя бы четверо школьников этого класса. Докажите, что найдётся такая экскурсия, что каждый из участвовавших в ней школьников принял участие по меньшей мере в  $\frac{1}{17}$  всех экскурсий.

**Решение.** Пусть число экскурсий равно  $n$ , и каждый школьник сохранил билеты со всех экскурсий, в которых участвовал. Назовем школьника *беднягой*, если он принял участие менее, чем в  $\frac{n}{17}$  экскурсиях. Надорвем все билеты бедняг. Допустим, что в каждой экскурсии хотя бы один из билетов надорван. Тогда надорвано не менее  $n$  билетов, вклад каждого школьника меньше  $\frac{n}{17}$  билетов, значит, бедняг больше 17. Выберем из них ровно 17. У выбранных школьников всего меньше  $17 \cdot \frac{n}{17} = n$  билетов, у каждого из остальных трех – не более, чем по  $n$  билетов, поэтому всего билетов меньше  $4n$ . С другой стороны, на каждую из  $n$  экскурсий продано не менее 4 билетов. Противоречие.

2.4. Пусть  $C(n)$  – количество различных простых делителей числа  $n$ .

а) [2] Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел  $(a, b)$ , что  $a \neq b$  и  $C(a+b) = C(a) + C(b)$ ?

б) [3] А если при этом дополнительно требуется, чтобы  $C(a+b) > 1000$ ?

а) **Ответ.** Бесконечно. Например, подходят все пары вида  $(2^n, 2^{n+1})$ . Здесь  $C(a) = C(b) = 1$ ,  $C(a+b) = C(3 \cdot 2^n) = 2$ .

б) **Ответ.** Бесконечно. **Решение.** Рассмотрим число  $P$ , равное произведению  $p_1 p_2 \dots p_n$  первых  $n$  простых чисел ( $n > 1000$ ).  $P$  – наименьшее число, у которого  $n$  простых делителей. Пусть  $C(P-1) = n-k$ . Рассмотрим число  $Q$ , равное произведению  $k$  различных простых чисел, каждое из которых больше  $p_n$  и всех простых делителей числа  $P-1$ . Возьмем  $a = Q$ ,  $b = (P-1)Q$ . Имеем  $C(a) = k$ ,  $C(b) = n$ ,  $C(a+b) = C(PQ) = n+k$ .

2.5. [5] Из 239 неотличимых на вид монет две – одинаковые фальшивые, а остальные – одинаковые настоящие, отличающиеся от фальшивых по весу. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь выяснить, какая монета тяжелее – фальшивая или настоящая? Сами фальшивые монеты находить не нужно.

**Решение.** Разобьем все монеты на группы А, Б, В и Г из соответственно 30, 30, 60 и 119 монет. Сначала сравним А с Б, затем А+Б с В. Возможны 4 случая.

1)  $A = B$ ,  $A+B = V$ . Это значит, что все 120 монет в  $A+B+V$  – настоящие. Отложив из  $A+B+V$  любую монету, и сравнив остальное с Г (где точно есть фальшивые монеты), узнаем требуемое.

2)  $A = B$ ,  $A+B \neq V$ . Тогда либо в А и в Б есть по фальшивой монете, либо все монеты в  $A+B$  – настоящие, а В есть фальшивые (одна или две). Отложив одну монету из А, мы заведомо оставим фальшивую монету в  $B+V$ . Сравним 119 взвешенных монет (без отложенной) с Г. Если равновесие, то фальшивые есть в Г и В, а в  $A+B$  их нет. Поэтому результат второго взвешивания определяет соотношение весов.

Если равновесия нет, то в Г все монеты настоящие, и нужную информацию дает результат последнего взвешивания.

3)  $A \neq B$ ,  $A+B = V$ . Значит, в  $A+B$ , а следовательно, и в В есть фальшивые монеты. Сравним В с 60 монетами из Г (они – настоящие), узнаем какие монеты легче.

4)  $A \neq B$ ,  $A+B \neq V$ . В  $A+B$  фальшивые монеты точно есть, значит в В – нет, то есть там все монеты настоящие. Но тогда уже результат второго взвешивания дает нужную информацию.