ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур, сложный вариант, 21 октября 2012 г.

Решения писали Л. Медников и А. Шаповалов (при участии А. Лебедева)

8-9 классы

3.1. [4] В числе не меньше 10 разрядов, в его записи используются только две разные цифры, причем одинаковые цифры не стоят рядом. На какую наибольшую степень двойки может делиться такое число?

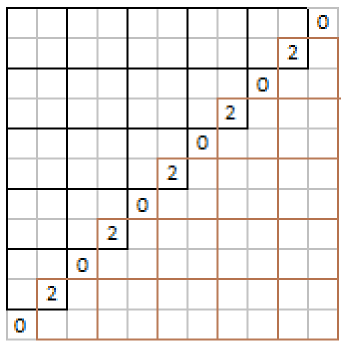
Ответ. На 2^6. **Решение**. Отщепим от числа из условия «хвост» из последних 8 цифр. Оставшееся число оканчивается на 8 нулей, поэтому делится на 2^8. А «хвост» имеет вид $\overline{abababab} = \overline{ab} \cdot 1010101$, где a и b – цифры. Ясно, что двойки в разложении «хвоста» на простые множители идут только из числа $\overline{ab}$. Наибольшая степень двойки, на которую оно может делится, не более шестой (2^7 уже трехзначно). Тогда и исходное число делится не более, чем на 6-ю степень двойки. Это достигается для числа 6464646464.

3.2. [5] Чичиков играет с Ноздревым. Сначала Ноздрев раскладывает 222 ореха по двум коробочкам. Посмотрев на раскладку, Чичиков называет любое целое число N от 1 до 222. Далее Ноздрев должен переложить, если надо, один или несколько орехов в пустую третью коробочку и предъявить Чичикову одну или две коробочки, где в сумме ровно N орехов. В результате Чичиков получит столько мертвых душ, сколько орехов переложил Ноздрев. Какое наибольшее число душ может гарантировать себе Чичиков, как бы ни играл Ноздрев.

Ответ. 37 душ. **Решение**. *Оценка сверху*. Положив в коробочки 74 и 148 орехов, Ноздрев может при любом N переложить не более 37. Действительно, N можно записать в виде $74k + r$, где $k = 0, 1, 2, 3$, а $-37 \le r < 37$. Если $r = 0$, то $k > 0$, и числа 74, 148 и 222 можно набрать одной или двумя коробочками, ничего не перекладывая. Если $r < 0$, то набрав число $74k$ одной или двумя коробочками, отложим из этих коробочек в третью r орехов. Если $r > 0$, $74k = 0$, 74 или 148. Взяв подходящую коробочку или не взяв ни одной, добавив к ним третью коробочку, куда из не взятой переложены r орехов.

Оценка снизу. Покажем, что для любой раскладки есть N, которое потребует переложить не менее 37 орехов. Пусть в коробочках лежат p и q орехов, $q \ge p$. Если $p \ge 74$, то при $N = 37$ придется переложить не менее 37 орехов. Если $p < 74$, то $q > 148$. Чтобы получить $N = 111$ надо либо к p орехам добавить более 37 штук, либо от q орехов отнять более 37 штук.

3.3. [6] В некоторых клетках квадрата 11×11 стоят плюсы, причем всего плюсов четное количество. В каждом квадратике 2×2 тоже четное число плюсов. Докажите, что четно и число плюсов в 11 клетках главной диагонали квадрата.



Решение. Ступенчатая фигура в левом верхнем углу (см. рис.) состоит из квадратиков 2×2, поэтому в ней четное число плюсов. То же верно для фигуры в левом нижнем углу. Каждая из клеток квадрата вне диагонали покрыта этими фигурами один раз, а каждая клетка диагонали 0 или 2 раза (см. рис.). Сумма числа плюсов в верхней и в нижней фигуре четна, при этом плюсы в клетках с цифрой 2 учтены дважды и дают, тем самым, четный вклад. Значит, и число плюсов вне диагонали четно. А так как четно общее число плюсов, то и на диагонали число плюсов четно.

3.4. [7] Дан треугольник ABC. Пусть I – центр вписанной в него окружности, и пусть X, Y, Z – центры окружностей, вписанных в треугольники AIB, BIC и AIC соответственно. Оказалось, что центр окружности, вписанной в треугольник XYZ, совпадает с I. Обязательно ли тогда треугольник ABC равносторонний?

Решение. Пусть K – точка пересечения отрезков XY и BI, L – отрезков YZ и CI, а M – отрезков XZ и AI. По условию отрезок XI делит пополам углы KIM и KXM, поэтому треугольники IKX и IMX равны. Аналогично, равны треугольники IKY и ILY, ILZ и IMZ. Следовательно, $\angle IKY = \angle ILY = 180° - \angle ILZ = 180° - \angle IMZ = \angle IMX = \angle IKX$, то есть $BI \perp XY$.

В треугольнике XBY отрезок BK служит биссектрисой и высотой, а значит, и медианой, то есть прямая BI – серединный перпендикуляр к отрезку XY. Поэтому $\angle XIK = \angle YIK$. Но $\angle XIK = ½ \angle AIB = ½ (90° + ½ \angle C)$, а $\angle YIK = ½ (90° + ½ \angle A)$. Следовательно, $\angle A = \angle C$. Аналогично, $\angle A = \angle B$.

3.5. [8] Машина ездит по кольцевой трассе по часовой стрелке. В полдень в две разных точки трассы встали два наблюдателя. К какому-то моменту машина проехала возле каждого наблюдателя не менее 30 раз. Первый наблюдатель заметил, что машина проезжала каждый следующий круг ровно на секунду быстрее, чем предыдущий. Второй заметил, что машина проезжала каждый следующий круг ровно на секунду медленнее, чем предыдущий. Докажите, что прошло не менее полутора часов.

Решение. Каждый наблюдатель насчитал не менее 29 кругов. Наблюдателя, у которого время прохождения круга растет, назовем Плюсом, а другого – Минусом. Пусть для Плюса машина проходит круги с 1-го по 29-й за $p - 14$, $p - 13$, ..., $p + 14$ секунд, а у Минуса – за $m + 14$, $m + 13$, ..., $m - 14$ секунд. Суммарное время прохождения 29 кругов равно $29p$ и $29m$ соответственно.

Первые 15 «кругов Плюса» покрывают 14 «кругов Минуса»: либо с 1-го по 14-й (если Плюс впервые встретился машине раньше Минуса), либо со 2-го по 15-й (если Минус встретился раньше). В любом случае
$(p - 14) +(p - 13) + \ldots + p > (m + 13) + (m + 12) + \ldots + m$.

С другой стороны, последние 15 «кругов Минуса» покрывают 14 «кругов Плюса»: либо с 16-го по 29-й, либо с 15-го по 28-й, откуда
$(m - 14) +(m - 13) + \ldots + m > (p + 13) + (p + 12) + \ldots + p$.

Сложив эти неравенства и приведя подобные, получим $p + m > 392$, откуда $29p + 29m > 29\cdot 392$. Значит, хотя бы одно из суммарных времен не меньше $29\cdot 196 = 5684$. Это время больше полутора часов (5400 секунд).

3.6. **а**) [4] Внутри окружности находится некоторая точка A. Через A провели две перпендикулярные прямые, которые пересекли окружность в четырех точках. Докажите, что центр масс этих точек не зависит от выбора таких двух прямых.

б) [4] Внутри окружности находится правильный $2n$-угольник ($n \geq 2$), его центр A не обязательно совпадает с центром окружности. Лучи, выпущенные из A в вершины $2n$-угольника, высекают $2n$ точек на окружности. $2n$-угольник повернули так, что его центр остался на месте. Теперь лучи высекают $2n$ новых точек. Докажите, что их центр масс совпадает с центром масс старых $2n$ точек. (*И. Митрофанов*)

Решение. Если точка A совпадает с центром O окружности, то утверждение очевидно. В противном случае докажем, что центр масс – это середина отрезка OA.

а) Прямые высекают две перпендикулярные хорды. У каждой хорды центр масс ее концов – середина этой хорды. Если одна из хорд – диаметр, то середина другой совпадает с A, поэтому центр масс – середина OA. Если обе хорды – не диаметр, то пусть B и C – их середины. Тогда $OABC$ – прямоугольник, и центр масс – середина ВС, которая совпадает с серединой OA.

б) Соединив точки с A, получим n хорд, образующих с соседними равные углы $^{180°}/n$. Центр масс концов хорд совпадает с центром масс середин этих хорд. Середины указанных хорд лежат на меньшей окружности с диаметром OA. Равенство вписанных углов влечет равенство дуг, поэтому эти середины лежат в вершинах правильного многоугольника, вписанного в меньшую окружность. Значит, их центр масс – это центр меньшей окружности, то есть – середина OA.

3.**7**. [10] Петя и Вася играют в игру, правила которой таковы. Петя загадывает натуральное число x с суммой цифр 2012. За один ход Вася выбирает любое натуральное число a и узнает у Пети сумму цифр числа $|x - a|$. Какое минимальное число ходов необходимо сделать Васе, чтобы гарантированно определить x?

Ответ. 2012 ходов. **Решение**. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа n.

Алгоритм. Первым ходом Вася называет 1. Если число x оканчивается на k нулей, то $S(x - 1) = 2011 + 9k$. Таким образом Вася узнаёт положение самой правой ненулевой цифры в x. Положим $x_1 = x - 10^k$. Вася знает, что $S(x_1) = 2011$. Подобрав на втором ходу число a так, чтобы $x - a = x_1 - 1$, Вася узнаёт сколько нулей в конце x_1. Пусть их m. Положим $x_2 = x_1 - 10^m$. Тогда $S(x_2) = 2010$. Подобрав на третьем ходу число a так, чтобы $x - a = x_2 - 1$, Вася узнаёт сколько нулей в конце x_2, и т.д. После 2012 хода он получит $S(x_{2012}) = 0$, тем самым найдя x.

Оценка. Пусть Петя признался, что в записи x есть только нули и единицы, то есть $x = 10^{k_{2012}} + 10^{k_{2011}} + \ldots + 10^{k_1}$, где $k_{2012} > k_{2011} > \ldots > k_1$. Тогда задача Васи сводится к выяснению значений показателей k_i. Пусть Васе не везет, и на i-м ходу оказывается, что 10^{k_i} больше предъявленного Васей числа a. Тогда, независимо от значений $k_{2012}, \ldots, k_{i+1}$, $S(x - a) = S(10^{k_i} - a) + (2012 - i)$. Тем самым, о значениях $k_{2012}, \ldots, k_{i+1}$ ничего не известно (кроме того, что все они больше k_i). В частности, после 2011 ходов может остаться неизвестным точное значение k_{2012}.

10-11 классы

4.1. [4] Дана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Известно, что для любого номера k можно указать такое натуральное число t, что $a_k = a_{k+t} = a_{k+2t} = \ldots$ Обязательно ли тогда эта последовательность периодическая, то есть существует ли такое натуральное T, что $a_k = a_{k+T}$ при любом натуральном k?

Ответ. Не обязательно. **Решение.** Пусть a_n равно наибольшей степени 2, на которую делится n (в частности, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 4$, $a_5 = 1$, $a_6 = 2$, $a_7 = 1$, $a_8 = 8$). Эта последовательность, очевидно, не периодична (в ней есть бесконечно много разных членов), однако для каждого k можно взять $t = 2k$. Действительно, числа $k, 3k, 5k, 7k, \ldots$ делятся на одну и ту же степень двойки.

4.2. [5] Чичиков играет с Ноздревым. Сначала Ноздрев раскладывает 1001 орех по трем коробочкам. Посмотрев на раскладку, Чичиков называет любое целое число N от 1 до 1001. Далее Ноздрев должен переложить, если надо, один или несколько орехов в пустую четвертую коробочку и предъявить Чичикову одну или несколько коробочек, где в сумме ровно N орехов. В результате Чичиков получит столько мертвых душ, сколько орехов переложил Ноздрев. Какое наибольшее число душ может гарантировать себе Чичиков, как бы ни играл Ноздрев?

Ответ. 71 душу. **Решение**. *Оценка сверху.* Положив в коробочки 143, $286 = 2\cdot143$ и $572 = 4\cdot143$ ореха, Ноздрев может при любом N переложить не более 71. Действительно, N можно представить в виде $143k + r$, где $0 \le k \le 7$, а $-71 \le r < 71$. Если $r = 0$, то $k > 0$, и число $143k$ можно набрать одной или несколькими коробочками, ничего не перекладывая. Если $r < 0$, то набрав коробочками число $143k$, отложим из этих коробочек в пустую r орехов. Если $r > 0$, то $1001 - N = 143(7 - k) - r$. Переложив r орехов, получим несколько коробочек с $1001 - N$ орехами. Тогда в остальных коробочках N орехов, их и предъявим.

Оценка снизу. Покажем, что для любой раскладки есть N, которое потребует переложить не менее 71 ореха. Пусть в коробочках лежат x, y и z орехов. Шесть чисел x, y, z, $x + y$, $x + z$, $y + z$ делят большой отрезок $[0, 1001]$ на семь меньших (возможно, некоторые из них вырождены), среди них есть отрезок длины не менее $^{1001}/_{7} = 143$. На этом отрезке есть целое число, отстоящее от концов отрезка не менее чем на 71. Без перекладывания мы можем получать только наборы, где общее число орехов лежит на конце одного из семи малых отрезков. Чтобы изменить это число на r, надо переложить не менее r орехов.

4.3. [6] См. 3.5

4.4. [8] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны соответственно точки C_1 и A_1, отличные от вершин. Пусть K – середина A_1C_1, а I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Оказалось, что четырехугольник A_1BC_1I вписанный. Докажите, что угол AKC тупой.

Решение. Пусть M – середина AC, а A_2, B_2 и C_2 – точки касания вписанной окружности соответственно со сторонами BC, AC и AB. $\angle A_1IC_1 = 180° - \angle B = \angle A_2IC_2$. Отсюда следует, что прямоугольные треугольники A_1A_2I и C_1C_2I равны (по катету и острому углу), причем один из них находится внутри четырехугольника BA_2IC_2, а второй – снаружи. Отсюда $AC_1 + CA_1 = AC_2 + CA_2 = AB_2 + CB_2 = AC$.

Построим параллелограммы AC_1KD и CA_1KE. Тогда $ADCE$ – тоже параллелограмм (возможно, вырожденный) и M – его центр, то есть середина отрезка DE. Как известно, медиана меньше полусуммы соответствующих сторон, то есть

$KM < ½ (KD + KE) = ½ (AC_1 + CA_1) = ½ AC$. Это значит, что точка K лежит внутри окружности с диаметром AC, поэтому угол AKC – тупой.

4.5. [8] См. 3.7

4.6. **а**) [5] Внутри сферы находится некоторая точка A. Через A провели три попарно перпендикулярные прямые, которые пересекли сферу в шести точках. Докажите, что центр масс этих точек не зависит от выбора такой тройки прямых.

б) [5] Внутри сферы находится икосаэдр, его центр A не обязательно совпадает с центром сферы. Лучи, выпущенные из A в вершины икосаэдра, высекают 12 точек на сфере. Икосаэдр повернули так, что его центр остался на месте. Теперь лучи высекают 12 новых точек. Докажите, что их центр масс совпадает с центром масс старых 12 точек. Докажите, что их центр масс совпадает с центром масс старых 12 точек.

Решение. Пусть O – центр сферы, Q – искомый центр масс. Прямые высекают хорды, и ясно, что Q – центр масс середин этих хорд (для икосаэдра, как центрально-симметричной фигуры, пары противоположных лучей тоже можно заменить прямыми, содержащими большие диагонали).

а) Середины хорд (обозначим их K, L, M) являются проекциями центра сферы O на проведенные прямые, поэтому $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AM}$ (вектор равен сумме своих проекций на три перпендикулярные оси). Отсюда $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AO}$.

б) Пусть $\overrightarrow{AQ} = \boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{AO} = \boldsymbol{a}$. Достаточно доказать, что $\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a}$, где коэффициент α не зависит ни от вектора $\boldsymbol{a}$, ни от положения икосаэдра.

Середины хорд являются проекциями точки O на диагонали икосаэдра. Пусть $\boldsymbol{e}_i$ – единичный вектор, направленный по i-й диагонали, A_i – соответствующая проекция. Тогда $\overrightarrow{AA_i} = |\boldsymbol{a}| \cos \varphi \cdot \boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i$ (в скобках – скалярное произведение, φ – угол между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{e}_i$) и $6\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + ... + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_6)\boldsymbol{e}_6$. Последнее выражение зависит от $\boldsymbol{a}$ линейно, поэтому равенство

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + ... + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_6)\boldsymbol{e}_6 = 6\alpha\boldsymbol{a} \quad (*)$$

достаточно доказать для любых трех некомпланарных векторов, в частности, для $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

Заметим, что результат не изменится, если направления некоторых векторов $\boldsymbol{e}_i$ сменить на противоположные, поэтому при доказательстве равенства (*) для $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1$ можно считать, что векторы $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_6$ направлены в вершины икосаэдра, ближайшие к той, куда направлен вектор $\boldsymbol{e}_1$. Но тогда в силу симметрии $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = ... = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_6)$, а $\boldsymbol{e}_2 + ... + \boldsymbol{e}_6 = \beta\boldsymbol{e}_1$, где β ни от чего не зависит.

Аналогично доказывается равенство (*) для $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_3$.

Замечание. Как видно из решения, $6\alpha = 1 + 5\cos^2\psi$, где ψ – угол между соседними диагоналями икосаэдра.

4.7. [10] Клетчатая полоска 1×1000000 разбита на 100 сегментов. В каждой клетке записано целое число, причем в клетках, лежащих в одном сегменте, числа совпадают. В каждую клетку поставили по фишке. Затем сделали такую операцию: все фишки одновременно передвинули, каждую – на то количество клеток вправо, которое указано в ее клетке (если число отрицательно, то фишка двигается влево); при этом оказалось, что в каждую клетку снова попало по фишке. Эту операцию повторяют много раз. Для каждой фишки первого сегмента посчитали, через сколько операций она впервые снова окажется в этом сегменте. Докажите, что среди посчитанных чисел не более 100 различных.

Решение. Отметим 99 границ между сегментами. Назовем пару фишек особой, если на старте они были соседями в первом сегменте, но вернулись туда через разное число операций. Ясно, что в какой-то момент фишки особой пары впервые попали в разные сегменты, причем до этого они в первый сегмент повторно не попадали. До этого они, очевидно, оставались соседями, значит, они и сейчас соседи по полоске, но их разделила граница. Докажем, что для каждой особой пары такая граница – своя. Допустим, что некоторая граница Г впервые разделила две особые пары П и Р: П после k операций, Р – после $m > k$ операций.

Заметим, что операция обратима: положения фишек в предыдущий момент определены однозначно. Откатаем назад k операций от момента разделения П границей. Тогда фишки из П вернутся на свои исходные места в первом сегменте. Теперь откатаем назад k операций от момента разделения Р границей. Так как пара Р занимала те же места, что П при предыдущем откате, то они и попадут на те де места, то есть в первый сегмент. Но это – положение фишек после $m - k$ операций от старта. Значит, фишки пары Р уже попадали *повторно* в первый сегмент. Но тогда они были разделены границей ранее, и разделение их границей Г – *не первое*. Противоречие.

Итак, количество особых пар не более 99. Значит, подсчитанные числа при движении по первому сегменту изменятся не более 99 раз, и таких чисел всего не больше 100.

Замечание. Несложно доказать, что каждая фишка действительно повторно попадет в первый сегмент. Однако можно обойтись и без этого: если фишка не попадает повторно в первый сегмент, будем считать, что «время» ее возвращения равно бесконечности. На дальнейшие рассуждения это не повлияет.