Осенний тур. ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

6-7 кл., **базовый вариант** *7 октября* 2012 *г.*

Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются

Баллы ***Задачи***

3 1. На концах диаметра окружности стоят единицы. Каждая из получившихся полуокружностей делится пополам и в середине каждой из них тоже пишется единица (первый шаг). Затем каждая из четырех получившихся дуг делится пополам, и в середине каждой из них снова пишется единица (второй шаг). Такая операция проделывается 2012 раз. Найдите сумму всех записанных чисел.

4 2. В теннисной секции тренируются девять юных спортсменов разной силы. Тренер решил провести тренировочные командные соревнования. В каждую команду включается по три спортсмена, во встрече между двумя командами каждый игрок любой команды играет ровно одну игру с одним из игроков другой команды. Предположим, что более сильный спортсмен всегда побеждает более слабого. Сможет ли тренер так распределить теннисистов по командам, что первая команда по числу побед одержала верх над второй, вторая – над третьей, третья – над первой?

2 3. а) На столе стоят 8 перевёрнутых стаканов. Разрешается одновременно переворачивать любые 7 стаканов. Можно ли добиться, чтобы все стаканы стояли правильно?

1 б) Та же задача, но всего стаканов 2012, а переворачивать разрешается 2011.

2 в) Та же задача, но всего стаканов 2013, а переворачивать разрешается 2012.

5 4. Про группу из пяти человек известно, что Алеша на 1 год старше Алексеева, Боря на 2 года старше Борисова, Вася на 3 года старше Васильева, Гриша на 4 года старше Григорьева, а еще в этой группе есть Дима и Дмитриев. Кто старше и на сколько: Дима или Дмитриев?

5. Пусть $C(n)$ – количество различных простых делителей числа n. (Например, $C(10) = 2$, $C(11) = 1$, $C(12) = 2$).

2 а) Найдите десять таких пар натуральных чисел (a,b), что $a \neq b$ и $C(a + b) = C(a) + C(b)$?

2 б) Для некоторого целого числа p выполняется $C(2012n) = C(n) + p$. Какие значения может принимать p? (Укажите все возможности).

4 в) Конечно или бесконечно число пар натуральных чисел (a, b), удовлетворяющих п. а)?

Осенний тур. ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

8-9 кл., **базовый вариант** *7 октября* 2012 *г.*

Баллы ***Задачи***

3 1. Про группу из пяти человек известно, что

Алеша на 1 год старше Алексеева, Боря на 2 года старше Борисова,

Вася на 3 года старше Васильева, Гриша на 4 года старше Григорьева,

а еще в этой группе есть Дима и Дмитриев. Кто старше и на сколько: Дима или Дмитриев?

4 2. Пусть $C(n)$ – количество различных простых делителей числа n. (Например, $C(10) = 2$, $C(11) = 1$, $C(12) = 2$). Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел (a, b), что $a \neq b$ и $C(a + b) = C(a) + C(b)$?

5 3. Таблица 10×10 заполняется по правилам игры «Сапер»: в некоторые клетки ставят по мине, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (по стороне или вершине). Может ли увеличиться сумма всех чисел в таблице, если все «старые» мины убрать, во все ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам?

5 4. Окружность касается сторон AB, BC, CD параллелограмма $ABCD$ в точках K, L, M соответственно. Докажите, что прямая KL делит пополам высоту параллелограмма, опущенную из вершины C на AB.

5 5. В классе 20 школьников. Было устроено несколько экскурсий, в каждой из которых участвовал хотя бы один школьник этого класса. Докажите, что найдется такая экскурсия, что каждый из участвовавших в ней школьников этого класса принял участие по меньшей мере в 1/20 всех экскурсий.

Осенний тур. ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

10-11 кл., базовый вариант *7 октября* 2012 *г.*

Баллы ***Задачи***

4 1. Таблица $m\times n$ заполняется по правилам игры «Сапер»: в некоторые клетки ставят по мине, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (по стороне или вершине). Может ли увеличиться сумма всех чисел в таблице, если все «старые» мины убрать, во все ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам?

2. Даны выпуклый многогранник и сфера, которая пересекает каждое ребро многогранника в двух точках. Точки пересечения со сферой делят каждое ребро на три равных отрезка. Обязательно ли тогда все грани многогранника:

2 а) равные многоугольники;

3 б) правильные многоугольники?

5 3. В классе 20 школьников. Было устроено несколько экскурсий, в каждой из которых участвовало хотя бы четверо школьников этого класса. Докажите, что найдется такая экскурсия, что каждый из участвовавших в ней школьников этого класса принял участие по меньшей мере в 1/17 всех экскурсий.

4. Пусть $C(n)$ - количество различных простых делителей числа n.

2 а) Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел (a, b), что $a \neq b$ и $C(a + b) = C(a) + C(b)$?

3 б) А если при этом дополнительно требуется, чтобы $C(a + b) > 1000$?

5 5. Из 239 неотличимых на вид монет две – одинаковые фальшивые, а остальные – одинаковые настоящие, отличающиеся от фальшивых по весу. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь выяснить, какая монета тяжелее – фальшивая или настоящая? Сами фальшивые монеты находить не нужно.