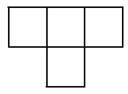
- *Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты*
- *Баллы за пункты одной задачи суммируются*

6-7 кл., *сложный вариант* *21 октября 2012 г.*

Очки	Задачи
3	1. Петя и Вася играют в игру, правила которой таковы. Петя загадывает целое число x с суммой цифр 2012. За один ход Вася выбирает любое натуральное число a и узнает у Пети число, равное $\|x - a\|$. Какое наименьшее число ходов необходимо сделать Васе, чтобы гарантированно определить x?
4	2. Четыре мальчика поделили между собой 111 орехов. После дележа каждый мальчик обнаружил, что у кого-то из остальных есть либо столько же орехов, сколько у него, либо ровно в два раза больше. Могло ли так быть?
5	3. В некоторых клетках таблицы 3 × 3 стоят плюсы, причем всего плюсов четное количество. В каждом квадратике 2 × 2 этой таблицы тоже четное число плюсов. Докажите, что четно и число плюсов в трех клетках главной диагонали таблицы.
6	4. Буратино посадил на Поле Чудес золотую, серебряную и медную монеты. Из каждой монеты вырастает дерево, которое дает только один урожай. На «золотом» дереве созревают ровно 2 золотые монеты, на «серебряном» – ровно 3 серебряные, а на «медном» – ровно 4 медные. Буратино решил, что каждый день он будет собирать все монеты одного вида (или все золотые, или все серебряные, или все медные) и сажать заново. Может ли так получиться, что в какой-нибудь день количество золотых и серебряных монет вместе будет равно количеству медных?
7	5. В клетках таблицы 12 × 16 клеток расставили натуральные числа так, что сумма чисел внутри фигурки, изображенной на рисунке, равна 44 при любом расположении этой фигурки (фигурку можно поворачивать). Может ли сумма всех чисел в таблице равняться 2012? 
3	6. а) В записи четырехзначного числа используются только две разные цифры, причем одинаковые цифры не стоят рядом. На какую наибольшую степень двойки может делиться такое число?
5	б) Решите такую же задачу для трехзначного числа.
10	7. Детский стол для игры в бильярд имеет форму правильного восьмиугольника с лузами в вершинах. Расположите на этом столе как можно меньше шаров так, чтобы каждая луза находилась на одной прямой с какими-то двумя шарами. (Лузы и шары считать точками.) Если Вы считаете, что меньшим количеством шаров обойтись нельзя, то постарайтесь это обосновать. *Примечание*. Правильный восьмиугольник – это такой восьмиугольник, все стороны которого равны между собой и все углы равны между собой (и равны по 135°).

8-9 кл., ***сложный вариант*** *21 октября 2012 г.*

Очки	*Задачи*
4	1. В числе не меньше 10 разрядов, в его записи используются только две разные цифры, причем одинаковые цифры не стоят рядом. На какую наибольшую степень двойки может делиться такое число?
5	2. Чичиков играет с Ноздревым. Сначала Ноздрев раскладывает 222 ореха по двум коробочкам. Посмотрев на раскладку, Чичиков называет любое целое число N от 1 до 222. Далее Ноздрев перекладывает, если надо, один или несколько орехов в пустую третью коробочку и предъявляет Чичикову одну или две коробочки, где в сумме ровно N орехов. В результате Чичиков получит столько мертвых душ, сколько орехов переложил Ноздрев. Какое наибольшее число душ может гарантировать себе Чичиков, как бы ни играл Ноздрев?
6	3. В некоторых клетках таблицы 11×11 стоят плюсы, причем всего плюсов четное количество. В каждом квадратике 2×2 этой таблицы тоже четное число плюсов. Докажите, что четно и число плюсов в 11 клетках главной диагонали таблицы.
7	4. Дан треугольник ABC. Пусть I — центр вписанной в него окружности, X, Y, Z — центры окружностей, вписанных в треугольники AIB, BIC и AIC соответственно. Оказалось, что центр окружности, вписанной в треугольник XYZ, совпадает с I. Обязательно ли тогда треугольник ABC равносторонний?
8	5. Машина ездит по кольцевой трассе по часовой стрелке. В полдень в две разных точки трассы встали два наблюдателя. К какому-то моменту машина проехала возле каждого наблюдателя не менее 30 раз. Первый наблюдатель заметил, что машина проезжала каждый следующий круг ровно на секунду быстрее, чем предыдущий. Второй заметил, что машина проезжала каждый следующий круг ровно на секунду медленнее, чем предыдущий. Докажите, что прошло не менее полутора часов.
4	6. а) Внутри окружности находится некоторая точка A. Через A провели две перпендикулярные прямые, которые пересекли окружность в четырех точках. Докажите, что центр масс этих точек не зависит от выбора таких двух прямых.
4	б) Внутри окружности находится правильный $2n$-угольник ($n \geq 2$), его центр A не обязательно совпадает с центром окружности. Лучи, выпущенные из A в вершины $2n$-угольника, высекают $2n$ точек на окружности. $2n$-угольник повернули так, что его центр остался на месте. Теперь лучи высекают $2n$ новых точек. Докажите, что их центр масс совпадает с центром масс старых $2n$ точек.
10	7. Петя и Вася играют в игру, правила которой таковы. Петя загадывает натуральное число x с суммой цифр 2012. За один ход Вася выбирает любое натуральное число a и узнает у Пети сумму цифр числа $\lvert x - a \rvert$. Какое наименьшее число ходов необходимо сделать Васе, чтобы гарантированно определить x?

Очки	***Задачи***
4	1. Дана бесконечная последовательность чисел a_1, a_2, a_3, … Известно, что для любого номера k можно указать такое натуральное число t, что $a_k = a_{k+t} = a_{k+2t} = \ldots$. Обязательно ли тогда эта последовательность периодическая, то есть существует ли такое натуральное T, что $a_k = a_{k+T}$ при любом натуральном k?
5	2. Чичиков играет с Ноздревым. Сначала Ноздрев раскладывает 1001 орех по трем коробочкам. Посмотрев на раскладку, Чичиков называет любое целое число N от 1 до 1001. Далее Ноздрев перекладывает, если надо, один или несколько орехов в пустую четвертую коробочку и предъявляет Чичикову одну или несколько коробочек, где в сумме ровно N орехов. В результате Чичиков получит столько мертвых душ, сколько орехов переложил Ноздрев. Какое наибольшее число душ может гарантировать себе Чичиков, как бы ни играл Ноздрев?
6	3. Машина ездит по кольцевой трассе по часовой стрелке. В полдень в две разных точки трассы встали два наблюдателя. К какому-то моменту машина проехала возле каждого наблюдателя не менее 30 раз. Первый наблюдатель заметил, что машина проезжала каждый следующий круг ровно на секунду быстрее, чем предыдущий. Второй заметил, что машина проезжала каждый следующий круг ровно на секунду медленнее, чем предыдущий. Докажите, что прошло не менее полутора часов.
8	4. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны соответственно точки C_1 и A_1, отличные от вершин. Пусть K — середина A_1C_1, а I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Оказалось, что четырехугольник A_1BC_1I вписанный. Докажите, что угол AKC тупой.
8	5. Петя и Вася играют в игру, правила которой таковы. Петя загадывает натуральное число x с суммой цифр 2012. За один ход Вася выбирает любое натуральное число а и узнает у Пети сумму цифр числа $\|x - a\|$. Какое наименьшее число ходов необходимо сделать Васе, чтобы гарантированно определить x?.
5	6. а) Внутри сферы находится некоторая точка A. Через А провели три попарно перпендикулярные прямые, которые пересекли сферу в шести точках. Докажите, что центр масс этих точек не зависит от выбора такой тройки прямых.
5	б) Внутри сферы находится икосаэдр, его центр A не обязательно совпадает с центром сферы. Лучи, выпущенные из А в вершины икосаэдра, высекают 12 точек на сфере. Икосаэдр повернули так, что его центр остался на месте. Теперь лучи высекают 12 новых точек. Докажите, что их центр масс совпадает с центром масс старых 12 точек. (Напомним, что икосаэдр — это правильный многогранник, у которого 20 треугольных граней и в каждой вершине сходятся 5 граней.).
10	7 Клетчатая полоска 1 × 1 000 000 разбита на 100 сегментов. В каждой клетке записано целое число, причем в клетках, лежащих в одном сегменте, числа совпадают. В каждую клетку поставили по фишке. Затем сделали такую операцию: все фишки одновременно передвинули, каждую — на то количество клеток вправо, которое указано в ее клетке (если число отрицательно, то фишка двигается влево); при этом оказалось, что в каждую клетку снова попало по фишке. Эту операцию повторяют много раз. Для каждой фишки первого сегмента посчитали, через сколько операций она впервые снова окажется в этом сегменте. Докажите, что среди посчитанных чисел не более 100 различных.