34 Турнир городов. <u>Весенний тур.</u>

Базовый вариант, самые младшие классы

6-7 класс

1. *Коля купил в буфете три пакетика ирисок, Витя – два пакетика, а когда подошла очередь Алеши, ирисок уже не было. Друзья разделили купленные ириски поровну. Выяснилось, что Алеша должен друзьям 25 монет. Сколько стоит пакетик ирисок и по сколько монет Алеша должен Коле и Вите?*

Ответ: Один пакетик ирисок стоит 15 монет, 20 и 5 монет.

Решение. Так как друзья съели ирисок поровну, то и заплатить они должны поровну, т.е. по 25 монет. Поскольку 5 пакетиков ирисок стоят $25 \cdot 3 = 75$ монет, то 1 пакетик стоит $75:5=15$ монет, 3 пакетика – 45 монет, 2 пакетика – 30 монет, т.е. Алеша должен вернуть Коле $45-25=20$ монет, а Вите $30-25=5$ монет.

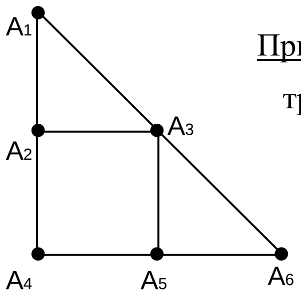
2. *Натуральное число a имеет $2n$ различных положительных делителей (включая 1 и a). Найдите их произведение.*

Ответ: a^n.

Решение. Легко видеть, что все $2n$ делителей можно разбить на n пар различных делителей так, что произведение делителей в каждой паре равно a (например: ρ_1 и $\frac{a}{\rho_1}$, ρ_2 и $\frac{a}{\rho_2}$, и т.д.). Но тогда произведение всех делителей, очевидно, равно $\underbrace{a \cdot a .. a}_{n\ раз} = a^n$.

3. *На плоскости даны шесть точек. Известно, что их можно разбить на две тройки так, что получатся два треугольника. Всегда ли можно разбить эти точки на две тройки так, чтобы получились два треугольника, которые не имеют друг с другом никаких общих точек (ни внутри, ни на границе)?*

Ответ: Не всегда, см. рисунок.



<u>Примечание:</u> Для полного решения нужно еще показать, что любые два треугольника с вершинами в заданных точках имеют хотя бы одну общую точку (сделайте соответствующий перебор самостоятельно).

4. *На доске 4×4 стоят четыре не бьющие друг друга ладьи. Все клетки доски распределяются во владения этих ладей по следующему правилу. Клетка, на которой стоит ладья, отдается этой ладье. Клетку, которую бьют две ладьи, получает та из ладей, которая ближе к этой клетке; если же эти две ладьи равноудалены от клетки, то каждая из них получает по полклетки. Докажите, что площади владений этих ладей одинаковы.*

Решение. Сравните решение задачи № 4 для 8-9 классов.

5. *Даны 5 гирь разного веса (одинаковых нет). Каждая весит целое число граммов. Известно, что как ни разложить гири (все или часть) на две чаши, чтобы гирь на них было не поровну, всегда перевесит чаша, на которой гирь больше. Докажите, что хотя бы одна из гирь весит более 8 граммов.*

Решение. Сравните решение задачи №3 для 8-9 классов.

6. *Одной операцией к числу можно прибавить* 9, *либо стереть в нем в любом месте цифру* 1. *Можно ли из числа* 2012 *при помощи таких операций получить число* 2013?

Замечание: если стирается единица в самом начале числа, а за ней сразу идут нули, то эти нули тоже стираются.

Ответ: можно.

Решение. Один из подходящих алгоритмов: прибавим к числу 2012 девятку 1111 раз (т.е. по существу прибавим 9999). Получим 12011. Сотрем первую 1, получим 2011, т.е. на самом деле как бы отняли 1. Проделаем такие операции 8 раз, получим, 2004. Осталось прибавить к этому числу 9 и получить 2013.

Весенний тур.

Сложный вариант, самые младшие классы

6-7 класс

1. *Припишите к числу 579 справа три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 5, на 7 и на 9. Укажите все возможные ответы или докажите, что это сделать невозможно.*

Ответ: 579915, 579600 и 579285.

Решение. Между 579000 и 579999 только указанные числа (первое равно $315 \cdot 1841$) делятся на 315.

Замечание: Казалось бы, естественно решать эту задачу, пользуясь признаками делимости. Однако здесь такое решение оказывается гораздо длиннее приведенного.

2. *По кольцевой дороге курсируют с одинаковой скоростью и равными интервалами* 12 *трамваев. Сколько трамваев нужно добавить, чтобы при той же скорости интервалы между трамваями уменьшились на одну пятую?*

Ответ: 3.

Решение. Длина интервала обратно пропорциональна числу трамваев, т.е. трамваев должно стать $12 \cdot 5/4 = 15$.

3. *Мама поручила Васе купить пакет сока, три шоколадки и 20 яиц. Вместо этого Вася купил ровно на те же деньги одно яйцо, три пакета сока и 20 шоколадок. Известно, что пакет сока дешевле шоколадки. Что стоит дороже - шоколадка или яйцо?*

Ответ: шоколадка стоит дороже.

Решение. Пусть сок стоит x, шоколадка y, а яйцо z. Тогда условие задачи можно записать так: $\begin{cases} x + 3y + 20z = z + 3x + 20y \\ x < y \end{cases}$. Тогда имеем: $19z = 17y + 2x < 19y$, откуда следует, что $z < y$.

4. *10 школьников послали друг другу приглашения на весенний тур Турнира городов так, что каждый послал 5 приглашений.*

а) Докажите, что найдутся двое, которые послали приглашения друг другу.

б) Останется ли верным утверждение задачи, если каждый пошлет 4 приглашения?

Ответ: б) нет.

Решение. а) 10 школьников и все возможные приглашения, которые могут быть посланы от одного из них другому можно изобразить в виде правильного десятиугольника и всех его диагоналей (или соответствующего полного графа с 10 вершинами). При этом всего отрезков (сторон и диагоналей) $45 = \dfrac{10 \cdot 9}{2}$. Но приглашений отправлено $50 = 10 \cdot 5$. По принципу Дирихле, какие-то отрезки приходится использовать дважды, а это означает, что соответствующие школьники послали приглашения друг другу.

б) Необязательно, так как теперь приглашений $10 \cdot 4 = 40$, что меньше 45, т.е. можно «расположить приглашения» так, что отрезки (и то не все) будут использованы только один раз.

5. *Фирма «Морозко» поставила в город Ляпинск холодильники. Треть из них была установлена в магазинах, девятая часть в кафе города, остальные поступили в школы. Фирма «Льдинка» поставила в город мороженое. 4/7 всей партии было распродано жителям города и хранится у них дома в холодильниках, а остальное мороженое равномерно распределили по холодильникам «Морозко» в магазинах, кафе и школах. Ночью отключили свет и 80% всего мороженого испортилось. Могло ли мороженое в школах полностью сохраниться?*

Ответ: нет.

Решение. Пусть всего холодильников «Морозко» n штук. Тогда в магазинах окажется $\frac{n}{3}$ холодильников, в кафе $\frac{n}{9}$, в школах $\frac{5}{9}n$ холодильников. Пусть фирма «Льдинка» поставила z штук мороженого, тогда в магазинах, кафе и школах окажется $\frac{3}{7}z$ мороженого, при этом в магазинах $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}z=\frac{1}{7}z$ мороженого, в кафе $\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{7}z=\frac{1}{21}z$ мороженого, в школах $\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{7}z=\frac{5}{21}z$ мороженого. Но $\frac{5}{21}z>\frac{1}{5}z$ (20%) сохранившегося мороженого. То есть, в школах мороженое не может полностью сохраниться.

6. а) Вася записал на бумаге два числа, не содержащих нулей. После этого он заменил цифры в записанных числах на буквы. Одинаковые цифры на одинаковые буквы, разные − на разные. Получились два слова СТРАУССС и ШОССЕ. Оказалось, что первое число делится на 24. Может ли оказаться так, что второе число разделится на 168?

б) Тот же вопрос в случае, когда записанные Васей числа могут содержать нули?

Ответ: а) нет, б) да (примеры чисел 81345888 и 26880).

Решение. а) Используем признак делимости на 8: последние три цифры числа (т.е. ССС) должны образовывать трехзначное число, кратное 8. Но это возможно в случае $C=8$. Для того, чтобы ШОССЕ делилось на 168, число ССЕ должно делиться на 8, причем $E\neq C$. Но это возможно лишь в случае $E=0$, что запрещено условием пункта а).

б) Основные условия указаны в решении пункта а). Осталось подобрать цифры Т,Р,А,У,Ш,О неравные 0 и 8 и так, чтобы СТРАУССС делился еще и на 3, а ШОССЕ на 3, и на 7, пример указан в ответе.

7. *Хозяйка испекла для гостей пирог. К ней может прийти либо 10, либо 11 человек. На какое наименьшее число кусков (не обязательно одинаковых) ей нужно заранее разрезать пирог так, чтобы его можно было поделить поровну как между 10, так и между 11 гостями?*

Ответ: На 20 частей, 10 из которых равны $\frac{1}{11}$ всего пирога и 10 оставшихся $\frac{1}{110}$ всего пирога.

Решение. Если придут 10 гостей, то каждый должен получить не меньше двух кусков. В самом деле, иначе один из 10 гостей получил бы один кусок в 1/10 часть пирога, и если бы пришло 11 гостей, то этот кусок нужно было бы дополнительно разделить. Таким образом, количество кусков не меньше, чем $2\cdot 10=20$.

Покажем, что двадцать кусков хватит. Разрежем пирог на 10 кусков по 1/11 части пирога и на 10 кусков по 1/110 пирога. Если придут 10 гостей, то каждому дадим один большой кусок и один маленький – всего 1/11+1/110=1/10. Если же придут 11 гостей, то десяти из них дадим по одному большому куску в 1/11, а одному – 10 маленьких кусков.