35-й Международный математический Турнир городов, осенний тур

Решения задач

Базовый вариант, самые младшие классы (6-7 классы)

1. [2] Выразите единицу, используя все десять цифр и операции сложения, вычитания, умножения и деления

Решение. Вариантов очень много; вот два простых из них:

1) с использованием скобок
$1+0\cdot(2+3+4+5+6+7+8+9)$;
2) без использования скобок
$1+0-(2-3)+(4-5)-(6-7)+(8-9)$.

2. [4] В турнире участвуют 100 борцов, все разной силы. Более сильный всегда побеждает более слабого. Борцы разбились на пары и провели поединки. Затем разбились на пары по-другому и снова провели поединки. Призы получили те, кто выиграл оба поединка.

а) [1] Каково наибольшее возможное количество призеров?

б) [3] Каково наименьшее возможное количество призеров?

Ответ. а) 50; б) один

Решение. а) Пронумеруем борцов по возрастанию силы от 1 до 100. В обоих турах 50 борцов из второй половины (т.е. с номерами от 51 до 100) проведут поединки с борцами из первой половины только в разном порядке, например:
1-й тур: $51-1$, $52-2$, $53-3$, …, $100-50$;
2-й тур: $51-2$, $52-3$, $53-4$, …, $100-1$.

б) Самый сильный обязательно станет призёром. Покажем, что может быть ровно один призёр. Пронумеруем борцов по возрастанию силы от 1 до 100. В первом туре проведём поединки 1 – 2, 3 – 4, …, 99 – 100, во втором – 100 – 1, 2 – 3, …, 98 – 99. Тогда каждый, кроме самого сильного, в одном из туров проиграет.

3. [4] Мальчик прошел 3/8 моста и услышал, что к мосту приближается автомобиль со скоростью 60 км/ч. Если мальчик побежит назад, то встретится с автомобилем в начале моста, если же он побежит вперед, то автомобиль настигнет его в конце моста. С какой скоростью бегает мальчик?

Ответ. 15 км/ч

Решение. Если мальчик побежит вперед и пробежит 3/8 моста, то автомобиль за это время подъедет к началу моста. Значит, пока мальчик пробежит оставшуюся часть моста, т.е. ¼ моста, автомобиль проедет весь мост, а значит, скорость мальчика в 4 раза меньше скорости автомобиля, т.е. 15 км/ч.

4. [5] Наибольший общий делитель натуральных чисел a,b будем обозначать (a,b). Пусть натуральное число n таково, что $(n,n+1)<(n,n+2)<(n,n+3)$. Найдите $(n,n+6)$.

Ответ. 6

Решение. Если числа n и k имеют общий делитель d, то $n+k$ и $n-k$ тоже имеют делитель d. Отсюда следует, что числа n и $n+1$ взаимно просты, т.е. $(n,n+1)=1$, а $(n,n+2)>1$ и $(n,n+2)\le 2$, т.е. n − четно. Аналогично $2<(n;n+3)\le 3$, т.е. n делится на 3. Итак, n делится на 2 и на 3, т.е. имеет вид: $n=6k$, но тогда $(n;n+6)=(6k;6k+6)=6$.

5. а) [2] Найдется ли шестизначное число, записанное шестью различными цифрами 0,1,2,3,4,5, такое, что после вычеркивания из него любых трех цифр получится составное четырехзначное число?

б) [4] Найдется ли десятизначное число, записанное десятью различными цифрами, такое, что после вычеркивания из него любых шести цифр получится составное четырехзначное число?

Ответ. а) найдется, б) найдется

Решение. а) Основная идея: в конце числа (т.е. справа должны стоять цифры, которые обеспечат выполнение признака делимости на 2 или на 5, т.е. цифры 0,2,4,5 в любом порядке. Пример: 132450.

б) Аналогично пункту а), но только после вычеркивания стоящих справа цифр 0,2,4,6,8,5 оставшиеся цифры 1,3,7,9 должны составлять составное число, например 1397, кратное 11 (этот пример легко найти тем, кто знает признак делимости на 11); или 1379, кратное 7.

Сложный вариант, самые младшие классы (6-7 классы)

1. [3] У Чебурашки и Крокодила Гены было по одинаковому мешку семечек. 1 января Чебурашка съел 10% семечек, 2 января он съел 20% оставшихся и т.д.; наконец 9 января он съел 90% оставшихся к тому моменту семечек, а остальные оставил на черный день. Гена поступил наоборот: 1 января он съел 90% семечек, 2 января он съел 80% оставшихся и т.д.; наконец 9 января он съел 10% оставшихся к тому моменту семечек, а остальные оставил на черный день. У кого на черный день припасено больше семечек?

Ответ. Одинаково

Решение. Пусть мешок содержит k кг семечек. После 1 января у Чебурашки осталось 90% семечек, т.е. $0{,}9\cdot k$; после 2 января 80% от оставшихся, т.е. $0{,}8\cdot 0{,}9\cdot k$; и так далее. После 9 января у него осталось: $0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9\cdot k$.

Аналогично у Крокодила Гены осталось $0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1\cdot k$.

2. [5] При каком наименьшем числе слагаемых возможно равенство: $СТУК+СТУК+\ldots+СТУК=AAAAAA$? (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным − разные).

Решение. Заметим, что $111111=13\cdot 8547$. Значит, можно взять $A=1, СТУК=8547$. Докажем, что меньше 13 слагаемых быть не может. В самом деле, если слагаемых 12, то цифра A должна быть четной, но 222222:12>10000. Если же число слагаемых 11 (или меньше), то 111111:11=10101 − опять пятизначное число, чего быть не должно, так как СТУК − число четырехзначное.

3. [2] а) Записав числа $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{10}$ в каком - либо порядке, расставьте между ними скобки и знаки арифметических действий так, чтобы полученное выражение равнялось нулю.

[4] б) Можно ли получить выражение равное нулю, не используя скобки?

Ответ. а) да; б) да.

Решение. а) Если заметить, что $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$, то результат получить легко:

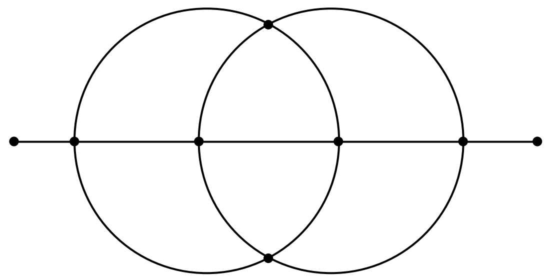
$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)=0$.

б) $1\cdot\frac{1}{2}:\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}:\frac{1}{9}-\frac{1}{5}:\frac{1}{10}-\frac{1}{4}:\frac{1}{8}=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}-2-2=0$.

4. [6] В путеводителе по Солнечному городу сказано, что метро этого города состоит из трех линий, имеет, по крайней мере, две конечные станции и, по крайней мере, два пересадочных узла, причем ни одна из конечных станций не является пересадочной. С каждой линии на каждую можно перейти, по крайней мере, в двух местах. Кроме того, известно, что схему метро можно изобразить, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя дважды один и тот же отрезок. Можно ли доверять этому путеводителю?

Ответ. Да.

Решение. См. пример: (попробуйте самостоятельно изобразить схему этого метро, не отрывая карандаш от бумаги).



5. [10] Есть 10 красных, 10 жёлтых и 10 зелёных палочек. Известно, что среди любых трёх палочек трёх разных цветов самая длинная палочка короче суммы длин двух оставшихся. Докажите, что найдётся такой цвет, что среди любых трёх палочек этого цвета самая длинная палочка короче суммы длин двух оставшихся.

Решение. Сравнить задачу №1 младших классов. (8-9 классов).

6. [10] Петя нарисовал на плоскости квадрат, разделил на 16 одинаковых квадратиков и раскрасил их в шахматном порядке в черный и белый цвета. После этого он загадал точку, находящуюся строго внутри одного из этих квадратиков. Вася может начертить на плоскости любую замкнутую ломаную без самопересечений и получить ответ на вопрос, находится ли загаданная точка строго внутри ломанной или нет. За какое наименьшее количество таких вопросов Вася может узнать, какого цвета загаданная точка − белого или черного?

Решение. Сравнить задачу №4 младших классов. (8-9 классов).

7. [12] Учитель выбрал 10 подряд идущих натуральных чисел и сообщил их Пете и Васе. Каждый мальчик должен разбить эти 10 чисел на пары, посчитать произведение чисел в каждой паре, а затем сложить полученные 5 произведений. Докажите, что мальчики могут сделать это так, чтобы разбиения на пары у них не были одинаковыми, но итоговые суммы совпадали.

Первое решение. Пусть Петя из первой четверки чисел n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ составит сумму $n(n + 1) + (n + 2)(n + 3) = 2n^2 + 6n + 6$, а Вася –
$n(n + 3) + (n + 1)(n + 2) = 2n^2 + 6n + 2$. Тогда на первой четвёрке чисел Петя наберет сумму на 4 больше, чем Вася. Со второй четвёркой чисел они поступят наоборот, сравняв общую сумму. Затем добавят к ней произведение оставшихся двух чисел и получат одинаковые результаты.

Второе решение. Пусть из первых шести чисел Петя составит сумму
$n(n + 5) + (n + 1)(n + 3) + (n + 2)(n + 4)$, а Вася – $n(n + 4) + (n + 1)(n + 5) + (n + 2)(n + 3)$. Обе эти суммы равны $3n^2 + 15n + 11$. Оставшиеся числа мальчики могут одинаково разбить на пары.