- *Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты*
- *Баллы за пункты одной задачи суммируются*

6-7 кл., ***сложный вариант*** *27 октября 2013 г.*

Очки ***Задачи***

3 1. У Чебурашки и Крокодила Гены было по одинаковому мешку семечек. 1 января Чебурашка съел 10% семечек, 2 января он съел 20% оставшихся и т.д.; наконец 9 января он съел 90% оставшихся к тому моменту семечек, а остальные оставил на черный день. Гена поступил наоборот: 1 января он съел 90% семечек, 2 января он съел 80% оставшихся и т.д.; наконец 9 января он съел 10% оставшихся к тому моменту семечек, а остальные оставил на черный день. У кого на черный день припасено больше семечек?

5 2. При каком наименьшем числе слагаемых возможно равенство: СТУК + СТУК + … + СТУК = АААААА? (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные).

2 3.а) Записав числа 1, 1/2, 1/3, …, 1/10 в каком-либо порядке, расставьте между ними скобки и знаки арифметических действий так, чтобы полученное выражение равнялось нулю.

4 б) Можно ли получить выражение равное нулю, не используя скобки?

6 4. В путеводителе по Солнечному городу сказано, что метро этого города состоит из трех линий, имеет, по крайней мере, две конечные станции и, по крайней мере, два пересадочных узла, причем ни одна из конечных станций не является пересадочной. С каждой линии на каждую можно перейти, по крайней мере, в двух местах. Кроме того, известно, что схему метро можно изобразить, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя дважды один и тот же отрезок. Можно ли доверять этому путеводителю?

10 5. Есть 10 красных, 10 жёлтых и 10 зелёных палочек. Известно, что среди любых трёх палочек трёх разных цветов самая длинная палочка короче суммы длин двух оставшихся. Докажите, что найдётся такой цвет, что среди любых трёх палочек этого цвета самая длинная палочка короче суммы длин двух оставшихся.

10 6. Петя нарисовал на плоскости квадрат, разделил на 16 одинаковых квадратиков и раскрасил их в шахматном порядке в черный и белый цвета. После этого он загадал точку, находящуюся строго внутри одного из этих квадратиков. Вася может начертить на плоскости любую замкнутую ломаную без самопересечений и получить ответ на вопрос, находится ли загаданная точка строго внутри ломаной или нет. За какое наименьшее количество таких вопросов Вася может узнать, какого цвета загаданная точка – белого или черного?

12 7. Учитель выбрал 10 подряд идущих натуральных чисел и сообщил их Пете и Васе. Каждый мальчик должен разбить эти 10 чисел на пары, посчитать произведение чисел в каждой паре, а затем сложить полученные 5 произведений. Докажите, что мальчики могут сделать это так, чтобы разбиения на пары у них не были одинаковыми, но итоговые суммы совпадали.

8-9 кл., ***сложный вариант*** *27 октября 2013 г.*

Очки ***Задачи***

5 1. Есть 100 красных, 100 жёлтых и 100 зелёных палочек. Известно, что из любых трёх палочек трёх разных цветов можно составить треугольник. Докажите, что найдётся такой цвет, что из любых трёх палочек этого цвета можно составить треугольник.

5 2. Учитель выбрал 10 подряд идущих натуральных чисел и сообщил их Пете и Васе. Каждый мальчик должен разбить эти 10 чисел на пары, посчитать произведение чисел в каждой паре, а затем сложить полученные 5 произведений. Докажите, что мальчики могут сделать это так, чтобы разбиения на пары у них не были одинаковыми, но итоговые суммы совпадали.

6 3. В треугольнике ABC угол C прямой. На катете CB как на диаметре во внешнюю сторону построена полуокружность, точка N — середина этой полуокружности. Докажите, что прямая AN делит пополам биссектрису угла C.

7 4. Петя нарисовал на плоскости квадрат, разделил на 64 одинаковых квадратика и раскрасил их в шахматном порядке в черный и белый цвета. После этого он загадал точку, находящуюся строго внутри одного из этих квадратиков. Вася может начертить на плоскости любую замкнутую ломаную без самопересечений и получить ответ на вопрос, находится ли загаданная точка строго внутри ломаной или нет. За какое наименьшее количество таких вопросов Вася может узнать, какого цвета загаданная точка — белого или черного?

9 — 5. В окружность вписан 101-угольник. Из каждой его вершины опустили перпендикуляр на прямую, содержащую противоположную сторону. Докажите, что хотя бы у одного из перпендикуляров основание попадёт на сторону (а не на её продолжение).

10 — 6. Число $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$ представили в виде несократимой дроби. Докажите, что если 3n+1 — простое число, то числитель получившейся дроби делится на 3n+1.

12 — 7. Петя и Вася играют в такую игру. Сначала на столе лежит 11 кучек по 10 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом игрок берёт 1, 2 или 3 камня, но Петя каждый раз выбирает все камни из любой одной кучи, а Вася всегда выбирает все камни из разных кучек (если их больше одного). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

10-11 кл., ***сложный вариант*** *27 октября 2013 г.*

Очки ***Задачи***

5 — 1. Петя нарисовал на плоскости квадрат, разделил на 64 одинаковых квадратика и раскрасил их в шахматном порядке в черный и белый цвета. После этого он загадал точку, находящуюся строго внутри одного из этих квадратиков. Вася может начертить на плоскости любую замкнутую ломаную без самопересечений и получить ответ на вопрос, находится ли загаданная точка строго внутри ломаной или нет. За какое наименьшее количество таких вопросов Вася может узнать, какого цвета загаданная точка — белого или черного?

6 — 2. Найдите все *n*, для которых верно утверждение:

для любых двух многочленов *P*(*x*) и *Q*(*x*) степени *n* найдутся такие одночлены ax^k и bx^l, где $0 \le k, l \le n$, что графики многочленов $P(x)+ax^k$ и $Q(x)+bx^l$ не будут иметь общих точек.

6 — 3. Дан правильный треугольник *ABC* с центром *O*. Прямая, проходящая через вершину *C*, пересекает описанную окружность треугольника *AOB* в точках *D* и *E*. Докажите, что точки *A, O* и середины отрезков *BD, BE* лежат на одной окружности.

7 — 4. Каждое ли целое число можно записать как сумму кубов нескольких целых чисел, среди которых нет одинаковых?

5. Существуют ли такие две функции *f* и *g*, принимающие только целые значения, что для любого целого x выполнены соотношения:

3 — а) $f(f(x))=x,\ g(g(x))=x,\quad f(g(x))>x,\quad g(f(x))>x$?

5 — б) $f(f(x))<x,\ g(g(x))<x,\quad f(g(x))>x,\quad g(f(x))>x$?

9 — 6. Петя и Вася играют в такую игру. Сначала на столе лежит 11 кучек по 10 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом игрок берёт 1, 2 или 3 камня, но Петя каждый раз выбирает все камни из любой одной кучи, а Вася всегда выбирает все камни из разных кучек (если их больше одного). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

14 — 7. На плоскости нарисована замкнутая самопересекающаяся ломаная. Она пересекает каждое свое звено ровно один раз, причём через каждую точку самопересечения проходят ровно два звена. Может ли каждая точка самопересечения делить оба этих звена пополам? (Нет самопересечений в вершинах и звеньев с общим отрезком.)