36 Турнир городов. Осенний тур.

Базовый вариант, самые младшие классы

6-7 класс

1. [1] *а) Есть 19 палочек с длинами 1,2,3,…,19. Можно ли из них сложить контур какого-нибудь прямоугольника?*

[2] *б) А если палочек 99 с длинами 1,2,3,…,99, то тогда можно?*

Ответ: а) Да; б) Да.

Решение: Для построения контура прямоугольника достаточно разбить все палочки на четыре группы так, чтобы суммы длин палочек в каких-то двух группах были равны между собой, и в двух других группах так же были равны между собой. Например, в пункте а) мы начала выберем палочки с длинами 5,10 и 15 и из них соберем две группы: {5;10} и {15} (5+10=15). Оставшиеся палочки сначала разобьем на пары с одинаковыми суммами: (1;19); (2;18); (3;17); (4;16); (6;14); (7;13); (8;12); (9;11). Тогда в две оставшиеся группы можно взять по любые четыре пары из указанных, например: {1;19;2;18;3;17;4;16} и {6;14;7;13;8;12;9;11}. Аналогично в пункте б) выберем сначала палочки с длинами 25;50;75 и из них составим две группы: {25;50} и {75}. Остальные разобьем на пары (1;99), (2;98), (3;97),… (24;76), (26;74),…, (49;51). В третью группу возьмем первые 24 пары из указанных, а во вторую оставшиеся 24 пары.

2. *Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя:*

[1] *а) ровно в 5,5 раз;*
[2] *б) ровно в шесть раз;*
[2] *в) ровно в пять раз?*

Ответ: а) Да, например, 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10;

б) Да, например, 1,2,3,4,5,6,7,8,9,15;

в) Нет.

Решение: В пунктах а) и б) достаточно построить примеры. Для упрощения заметим, что наибольший общий делитель (сокращенно НОД) всех чисел в среднем арифметическом можно вынести за скобки и в отношении с тем же НОДом он сократится. Таким образом, можно строить примеры для пунктов а) и б) в случае, когда НОД всех десяти чисел равен 1. Для пункта а) подойдут первые десять натуральных чисел (и у них как раз наименьшее среднее арифметическое среди всех возможных десятков различных натуральных чисел). Для пункта б) можно взять первые девять натуральных чисел и число 15. Теперь видно, что для пункта в) примера не существует, ибо наименьшее среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел 5,5. (см. пункт а).

3. [4] *В спортивно-оздоровительном лагере «Бригантина» есть три математика: Борис Валентинович, Леонид Иванович и Сергей Юрьевич. Каждый из них ежедневно получает некоторую постоянную плату за работу. Однажды главный бухгалтер пришел к директору лагеря Владимиру Александровичу и доложил, что на имеющееся средства можно в течение 24 дней выплачивать жалование Борису Валентиновичу и Сергею Юрьевичу, или 18 дней Борису Валентиновичу и Леониду Ивановичу, или 8 дней Леониду Ивановичу и Сергею Юрьевичу. Директор сразу же уволил главного бухгалтера, сказав, что он обманывает. Почему так поступил директор лагеря?*

Решение: Видимо, что-то в делах бухгалтера не так. Проверим это. Пусть ежедневная заработная плата Бориса Валентиновича равна a, Леонида Ивановича равна b, Сергея Юрьевича равна c, общая сумма денег на зарплату равна D. Тогда условие задачи можно записать так: $\begin{cases} 24a+24c=D, \\ 18a+18b=D, \\ 8b+8c=D. \end{cases}$ Вычтем из первого равенства третье, умноженное на 3, получим: $24a-24b=-2D$ или $12a-12b=-D$. Теперь умножим полученное равенство на 3, и сложим с удвоенным вторым, получим: $72a=-D$, т.е. либо на счету лагеря отрицательное количество денег, либо зарплата Бориса Валентиновича отрицательна, либо оба эти значения равны нулю, а также b и c.

4. [5] *На столе лежит правильный треугольник, сделанный из жести. Его разрешается катать по столу, переворачивая через любую сторону. Докажите, что если после нескольких таких операций треугольник вернулся на свое первоначальное место, то и все его вершины тоже вернуться на свои места.*

Доказательство: Обозначим вершины исходного треугольника через A, B и C, и покрасим их в три цвета: A в красный, B в зеленый, C в желтый. Покатаем наш треугольник, как указано в условии, несколько раз, каждый раз раскрашивая вершины получающихся новых треугольников в соответствующие цвета (например, на рис.1 точки $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ стали красными). Получается замощение плоскости правильными (равносторонними) треугольниками, вершины которых периодически раскрашены в три цвета. Легко видеть, что такое замощение

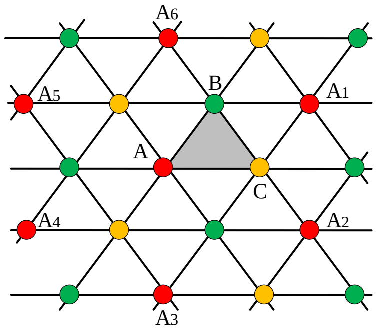

рис.1

с раскрашенными вершинами будет получаться и при дальнейших перекатываниях, поскольку картинка на рис.1 переходит сама в себя при параллельном переносе плоскости на отрезок AA_1 (или AA_2, или AA_3 и т.п.). Тогда понятно, что при любой комбинации переворачиваний вершины треугольников соответствующих цветов всегда совмещаются, а это значит, что если исходный треугольник вернулся на свое место, то его вершины тоже заняли исходные положения.

5. [5] *С начала учебного года Андрей записывал свои оценки по математике. Получая очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл ее неожиданной, если до этого момента она встречалась реже каждой из всех остальных возможных оценок. (Например, если бы он получил с начала года подряд оценки 3,4,2,5,5,5,2,3,4,3, то неожиданными были бы первая пятерка и вторая четверка). За весь учебный год Андрей получил 20 оценок − по 5 пятерок, четверок, троек и двоек (неизвестно, в каком порядке). Можно ли точно сказать, сколько оценок были для него неожиданными?*

Ответ: 5

Решение: Предположим, Андрей завел для себя журнал оценок по математике такой, как указан на рис 2. Каждая строчка соответствует своей оценке, звездочка означает очередную полученную оценку; на рис.2 изображен момент, когда Андрей получил две оценки 3, три оценки 4 и одну оценку 5. Понятно, что некая оценка будет неожиданной, если она будет поставлена последней в соответствующем столбике. Например, для рис.2, если Андрей получит очередную оценку 2, то она будет неожиданной. Поэтому неожиданных оценок будет столько, сколько полностью заполненных столбиков. А по условию их будет 5.

2					
3	*	*			
4	*	*	*		
5	*				

рис.2