36-й Турнир городов, осенний тур.
Решения задач.

Составитель: Леонид Медников

Базовый вариант, 8-9 классы

1. [3] Есть 99 палочек с длинами 1, 2, 3, ..., 99. Можно ли из них сложить контур какого-нибудь прямоугольника?

(*Е.В. Бакаев*)

Ответ: можно.

Например, из палочек длины 1, 2, 3 составим две стороны длины 3, а остальные спички разобьем на 48 пар с суммой длин 103: (4, 99), (5, 98), …, (51, 52) и составим из них две стороны длины $24\cdot 103 = 2472$.

2. Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя

а) [2] ровно в шесть раз;

б) [2] ровно в пять раз?

(*И.Ф. Акулич*)

Ответ: а) существуют; **б**) не существуют.

б) Решим сначала пункт б). Допустим, такие числа существуют. Пусть их наибольший общий делитель равен d. Тогда эти числа можно записать в виде: a_1d, a_2d, …, $a_{10}d$, где все a_i – попарно различные натуральные числа. Следовательно, требование условия выглядит так:

$$(a_1d + a_2d + \ldots + a_{10}d) / 10 = 5d$$

или:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 50$$

В левой части этого равенства сумма десяти различных натуральных чисел, которая, очевидно, не меньше суммы десяти *наименьших* натуральных чисел, т.е. $1+2+\ldots+10 = 55$. А поскольку правая часть равна 50, что меньше 55, то в данном случае ответ таков: *не существуют*.

а) Теперь разберёмся с пунктом а). Здесь, рассуждая аналогично, приходим к равенству:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 60,$$

которое уже вполне возможно (возьмем, например, числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 15). В качестве же d можно взять любое натуральное число (хотя бы единицу). Так что здесь ответ таков: *существуют*.

3. [5] На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка K, а на стороне BC – точка L так, что $KB = LC$. Отрезки AL и CK пересекаются в точке P. Докажите, что отрезки DP и KL перпендикулярны.

(*Е.В. Бакаев*)

Треугольники KAD и LBA равны (как прямоугольные, по двум катетам). Значит, сумма углов LAB и AKD равна 90° (поскольку $\angle AKD = \angle ALB$, а $\angle LAB + \angle ALB = 90°$ из прямоугольного треугольника ABL). Это значит, что отрезки AL и KD перпендикулярны. (Это следует также из того, что отрезок DK при повороте на 90° вокруг центра квадрата переходит в отрезок AL.) Аналогично, DL и CK перпендикулярны. Таким образом, прямые AL и CK содержат высоты треугольника DKL. Но в треугольнике все три высоты пересекаются в одной точке. Следовательно, P – точка пересечения высот (ортоцентр), откуда прямая DP содержит третью высоту, и значит, перпендикулярна KL.

4. [5] С начала учебного года Андрей записывал свои оценки по математике. Получая очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл её *неожиданной*, если до этого момента она встречалась реже каждой из всех остальных возможных оценок. (Например, если бы он получил с начала года подряд оценки 3, 4, 2, 5, 5, 5, 2, 3, 4, 3, то неожиданными были бы первая пятерка и вторая четвёрка.) За весь учебный год Андрей получил 40 оценок – по 10 пятерок, четверок, троек и двоек (неизвестно, в каком порядке). Можно ли точно сказать, сколько оценок были для него неожиданными?

(*Е.В. Бакаев*)

Ответ: можно.

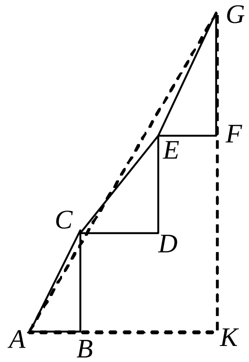
Первой неожиданной оценкой будет последняя, полученная *в первый раз*. Второй неожиданной оценкой будет последняя, полученная *во второй раз*, и т. д. Значит, всего будет 10 неожиданных оценок.

5. Даны N прямоугольных треугольников. У каждого выбрали по одному катету и нашли сумму их длин, затем нашли сумму длин оставшихся катетов, и, наконец, нашли сумму длин всех гипотенуз. Оказалось, что три найденных числа являются длинами сторон некоторого прямоугольного треугольника. Докажите, что у всех исходных треугольников одно и то же отношение большего катета к меньшему, если

а) [2] $N = 2$;

б) [3] N – любое натуральное число, большее 1.

(*Е.В. Бакаев*)



Рассмотрим для наглядности случай $N = 3$ (случай любого другого N разбирается точно так же). Приставим треугольники ABC, CDE и EFG друг к другу так, как показано на рисунке. Получится, что AK – сумма «первых» катетов, а KG – сумма «вторых». По условию, $AC + CE + EG = AG$. Но это возможно, только если точки C и E лежат на отрезке AG (иначе ломаная $ACEG$ длиннее отрезка AG). Следовательно, $\angle CAB = \angle ECD = \angle GEF$, а это и означает, что у исходных треугольников одно и то же отношение большего катета к меньшему.

Базовый вариант, 10-11 классы

1. Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя

а) [1] ровно в шесть раз;

б) [2] ровно в пять раз?

(*И.Ф. Акулич*)

См. решение задачи 2 младших классов.

2. [4] Вершины треугольника обозначены буквами A, B, C по часовой стрелке. Треугольник последовательно поворачивают по часовой стрелке: сначала вокруг вершины A на угол, равный $\angle A$, потом – вокруг вершины B на угол, равный $\angle B$, и так далее по циклу (каждый раз поворот делают вокруг текущего положения очередной вершины). Докажите, что после шести поворотов треугольник займёт исходное положение.

(*В. Расторгуев*)

Первое решение. Нетрудно заметить, что центры поворотов каждый раз лежат на прямой l, проходящей через исходную сторону AC. Пусть длины сторон треугольника равны a, b, c. Тогда на прямой l последовательно откладываются отрезки c, $–a$, b, $–c$, a, $–b$, сумма этих «сдвигов» равна 0. После первых трёх поворотов треугольник снова будет касаться прямой l своей стороной AC, но будет лежать по другую сторону от l и сдвинется вдоль прямой на некоторое расстояние. За три следующих поворота он вернётся в исходную полуплоскость и сдвинется на такое же расстояние в обратную сторону, то есть в итоге совпадёт с исходным.

Второе решение. Композиция первых трёх поворотов даст поворот на 180°, то есть центральную симметрию относительно некоторой точки O. При этом исходный треугольник ABC перейдет в центрально симметричный ему треугольник $A'B'C'$. Композиция следующих трёх поворотов даст центральную симметрию относительно точки, центрально симметричной точке O, то есть снова относительно O. При этом треугольник $A'B'C'$ перейдет в треугольник ABC.

3. [5] Даны 15 целых чисел, среди которых нет одинаковых. Петя записал на доску все возможные суммы по 7 из этих чисел, а Вася – все возможные суммы по 8 из этих чисел. Могло ли случиться, что они выписали на доску одни и те же наборы чисел? (Если какое-то число повторяется несколько раз в наборе у Пети, то и у Васи оно должно повторяться столько же раз.)

(*И.И. Богданов*)

Ответ: могло.

Рассмотрим набор из семи различных натуральных чисел, семи противоположных им чисел и нуля. Пусть $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7$ – сумма произвольных семи чисел из этого набора. Тогда сумма оставшихся восьми чисел $a_8, a_9, \ldots, a_{15}$ равна $-S$ (так как сумма всех 15 чисел равна нулю). Значит, сумма 8 чисел $-a_8, -a_9, \ldots, -a_{15}$ (которые также входят в наш набор) равна S. Соответствие между семерками $\{a_1, a_2, \ldots, a_7\}$ и восьмерками $\{-a_8, -a_9, \ldots, -a_{15}\}$, очевидно, взаимно однозначно.

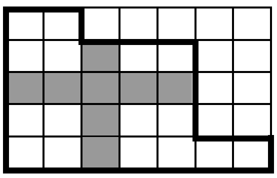
4. [5] Даны N прямоугольных треугольников ($N > 1$). У каждого выбрали по одному катету и нашли сумму их длин, затем нашли сумму длин оставшихся катетов, и, наконец, нашли сумму длин всех гипотенуз. Оказалось, что три найденных числа являются длинами сторон некоторого прямоугольного треугольника. Докажите, что все исходные треугольники подобны.

(*Е.В. Бакаев*)

См. решение задачи 5 младших классов.

5. [5] На столе лежала кучка серебряных монет. Каждым действием либо добавляли одну золотую монету и записывали количество серебряных монет на первый листок, либо убирали одну серебряную монету и записывали количество золотых монет на второй листок. В итоге на столе остались только золотые монеты. Докажите, что в этот момент сумма всех чисел на первом листке равнялась сумме всех чисел на втором.

(*Е.В. Бакаев*)



Пусть в начале было n серебряных монет, а в конце – m золотых. Будем изображать ситуацию в каждый момент точкой (k, l) на координатной плоскости (k – число золотых монет на столе, l – число серебряных). Каждое действие – сдвиг на единицу вправо или вниз – будем изображать соответствующим отрезком. В результате получится ступенчатая ломаная, соединяющая точки $(0, n)$ и $(m, 0)$ (см. рис.). При сдвиге вправо на первом листке записывается число, равное площади столбца, расположенного под проведённым отрезком, при сдвиге вниз на втором листке записывается число, равное площади планки, расположенной левее проведенного отрезка. Поэтому в конце сумма чисел на каждом листке будет равна площади, ограниченной проведённой ломаной и осями координат.